Q2：
「電流を x で積分すると、$i(x,t)$ が x を含まない」とあるが、何故積分しているのに x が含まれないのか。

A. たしかに，変な文章ですね．次のように書き直します： 電荷密度に時間的な変化がないので $\frac{\partial\lambda}{\partial t}=0$， $-\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\partial I}{\partial x}=0$． $\frac{\partial I}{\partial x}=0$から，電流$I$は「$x$で微分して 0 になる」のだから，$I$は，$I(x,t)$とは書いたが$x$を含まない．したがって，電流は$x$軸上のどこでも同じ値となる．（題意より，電流は時間的に一定だから，$I(x,t)$には t も含まれない．すなわち時間的な変化もない．）

Q3：
電荷の線密度が負になるときがありますが、どのようなことを意味しているのですか。

A. ある部分が負に帯電していると電荷密度が負になります.

Q5－②,
次元が同じというのと、単位が同じというのは同じ意味ですか。

A. 少し違います．次元のほうが基本的な概念です．次元が異なれば単位が同じになることはありえません．ある量とその量を表す基準となる単位の量とは，必ず同じ次元の量です．しかし，同じ次元の量でも異なる単位の量があります．たとえば $\mathrm{cm^2}$ と $\mathrm{m^2}$は，ともに面積の次元をもつ単位ですが，単位としては異なります． たとえば, 物体の「面積」は「長さ」×「長さ」という次元をもちますが,「速度」は$\frac{「長さ」}{「時間」}$という次元をもつので，両者を比較して大小関係を論じることは無意味です．次元とは，その量が「どのような基本量をどのように構成してできているか」を示す概念です． 単位は，その量が基準の量の何倍であるかを示すときの「基準の量」です．たとえば，ある面積が$3\ \mathrm{m^2}$であるとは，$1\ \mathrm{m^2}$という単位の量の 3 倍であることを表します：$3\ \mathrm{m^2}$は，$3\times1\ \mathrm{m^2}$の簡略表現です． 電磁気現象に現れる量は，「長さ」「時間」「質量」という力学的な次元に「電流」という電気現象に特有の次元が加わります．たとえば，電流密度は，$\frac{「電流」}{「長さ」\times「長さ」}$ という次元の量です．電流密度の単位を $1\ \mathrm{A\ m^{-2}}$とするとき「MKSA 単位系で表した」といいます．

Q6－①：
Word では $s_{z'}$ となっていたが、$s_{x'}$ ではないか。

A. ミスプリでした．ごめんなさい.

ベクトルを書き表して各電流を求めるという解釈でよいのか。

A. 電流密度ベクトルと面積を表すベクトルの内積を計算して，その面を通過する電流を求める，という趣旨の問題です.

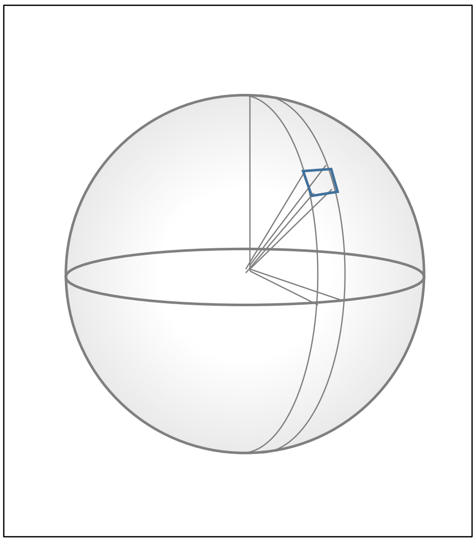
Q6 - ②：

$r^2 \to R^2$ とできるのはなぜか。

A. 「球面上の位置$\vec{r}$における面積dSの面積素片を表すベクトルは・・・」と書いたように，球の半径がRなので，球面上の点を表す位置ベクトル$\vec{r}$ の長さがRです.

球の表面積をどうやって二重積分するのかがわからない。

A. $\iint_S dS$は「表面Ｓを微小な面積に分割し，その一つを代表的に dS と表す．無数にある dS をＳの表面上でくまなく寄せ集める」という意味です．ですから，球であろうと，ほかの形であろうと，$\iint_S dS$はＳの全面積となります.



面積の次元をもつので二重積分で表しましたが，$\int_S dS$と書いてもかまいません.

球の表面を，座標軸をとって二重積分で表すのは xy 座標系では面倒な計算になるので，3 次元極座標(r, θ, ϕ)を用います：rは原点からの距離，θは z 軸（天頂）から xy 平面（水平面）に降ろしてくる角，ϕは xy 面内（水平面内で）の x 軸から(北?から)の角＝＝微分と積分の教科書を参照＝＝．本問の半径 R の球面は，$r = R =$ 一定 という式で表されます．$\theta \to \theta + d\theta$,$\phi \to \phi + d\phi$と変数を微小に変化させたとき，球面上には微小な面が現れます．その面積は

$$\mathrm{dS} = (\mathrm{R}\sin\theta\ \mathrm{d}\phi) \times (\mathrm{R}\,\mathrm{d}\phi\,) = \mathrm{R}^2 \sin\theta\ d\theta\, d\phi$$

よって

$$\iint_S dS = \iint_S \mathrm{R}^2 \sin\theta\ d\theta\, d\phi = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2$$

Q7 - ②：

式の説明をしてください.

A.

$$\vec{j} = \frac{I_0}{4\pi r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{I_0}{4\pi}\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$$

より

$$j_x(x,y,z) = \frac{I_0}{4\pi}\frac{x}{r^3},\qquad j_y(x,y,z) = \frac{I_0}{4\pi}\frac{y}{r^3},\qquad j_z(x,y,z) = \frac{I_0}{4\pi}\frac{z}{r^3}$$

となります．また，原点から点(x,y,z)までの距離は$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$であり，点の位置によりrが変化するので，rはx,y,zの関数です．

この問で注目する微分は

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{j}} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{I_0}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right)$$

です．最右辺の各項の偏微分の計算は，たとえば

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)$$

を力づくで計算してもかまいませんが，せっかく習った合成関数の偏微分法を使うと計算が楽になります．

関数の積$\frac{x}{r^3} = \frac{1}{r^3}\times x$の偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\times x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)\times x + \frac{1}{r^3}\times\frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)\times x + \frac{1}{r^3}$$

となるので，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)$さえ計算できればよいことになります．

$$f(r) = \frac{1}{r^3}$$

と書くと，この関数が$f(r(x,y,z))$という合成関数なので

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{df}{dr}$$

となります．$\frac{df}{dr}$は 1 変数の微分なので簡単です：

$$\frac{df}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\,r^{-4} = -\frac{3}{r^4}$$

つぎに

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

以上をまとめると

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)\cdot x + \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4}\frac{x}{r}\cdot x + \frac{1}{r^3} = \frac{-3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}$$

他の項の偏微分についても同様に

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{-3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{-3z^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}$$

となるので

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\times\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)=\left(\frac{-3x^2}{r^5}+\frac{1}{r^3}\right)+\left(\frac{-3y^2}{r^5}+\frac{1}{r^3}\right)+\left(\frac{-3z^2}{r^5}+\frac{1}{r^3}\right)$$

$$=\left(\frac{-3x^2}{r^5}+\frac{r^2}{r^5}\right)+\left(\frac{-3y^2}{r^5}+\frac{r^2}{r^5}\right)+\left(\frac{-3z^2}{r^5}+\frac{r^2}{r^5}\right)=\frac{-3(x^2+y^2+z^2)+3r^2}{r^5}$$

$$=0$$

したがって

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{j}}=\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=\frac{I_0}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0$$

を得ます．ただし，$\vec{j}=\frac{I_0}{4\pi r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$の分母が 0 になる原点では電流密度が無限大になり，$\nabla\cdot\vec{\mathrm{j}}$は意味を持ちません．