１，電気的な力

電荷の間に働く力は，異種電荷で引力，同種電荷で反発力，電荷が大きければ強い，遠くなれば弱くなる・・・などは分かっていたが，

これを「定量的に」表そうとしたのがクーロンである．

クーロンは，ニュートンの万有引力の法則を手本にして，「電荷の間に働く力も逆二乗則に違いない」と考えた．

それを証明する実験を試みた．クーロンは小さな力を精密に測定する方法を開発していたからである．

実験結果を踏まえて公表されたのが，静電気力についてのクーロンの法則である．

しかし，現代ですら，クーロンの実験を再現しようとしても，データがばらついて「実験から逆二乗則を見つける」のは無理のようである．

現代風にいえば，クーロンは「逆二乗則は実験結果と矛盾しない」ことを示したにとどまる．

実は，クーロンが実験を行ったころとほとんど同時に，キャベンディシュは極めて巧妙な方法で逆二乗則を証明している．

だが，キャベンディシュの実験結果が公表されたのはそれから 100 年も後のことであった．

キャベンディシュの方法は，まず，金属で球をつくりその外側を別の金属の球殻で覆い，両者を導線でつないで外球に帯電する．

逆二乗則が成り立つなら，内球に帯電することがない．内外を絶縁して外球を開き，内球の電荷を調べる．

電荷の有無を測定するのは当時でも非常に感度よく行えた．感度の限界から逆二乗則がどの程度の精度で正しいかを判定することができるのである．

ともあれ，2 個の点電荷の間に作用する静電気力に関するクーロンの法則は次のようになる：

１．力の大きさは，どちらの電荷にも比例する．したがって 2 個の電荷の積に比例する．

２．力の大きさは，電荷間の距離の 2 乗に反比例する（逆 2 乗則）

３．力の向きは，2 個の電荷を結ぶ直線に沿った方向．

４．どちらの電荷に作用する力も大きさが等しい．　（３と４から，静電気力は作用反作用の法則を満たす）

力の大きさを式で表すと

$$F = k\frac{qQ}{r^2}$$

比例係数kは，電荷の周囲の空間が真空か，空気か，水か，などによって変化する．

具体的なkの値は，電荷の単位，力の単位，距離の単位により変わってくる．

電荷の単位を 1C, 距離や力を MKS 単位系（1m, 1N）で表すと，真空中で

$$k_0 \simeq 9.0 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

となる．k_0の0は真空中の値であることを示す．

2. 真空の誘電率

真空中のクーロン力は，前スライドで，

$$F = k_0 \frac{qQ}{r^2}$$

と表され，比例係数が

$$k_0 \simeq 9.0 \times 10^9 \ \mathrm{N\,m^2/C^2}$$

となることを記した.

まったく同じ力を

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$$

と表し

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} \simeq 8.9 \times 10^{-12} \ \mathrm{C^2/Nm^2}$$

を真空の誘電率という.

理論的な計算では，k_0よりもε_0を用いることになる.

クーロン力の式の分母に$4\pi r^2$という項が現れるが，これは半径rの球の表面積であることに注意せよ.

3．2 個の点電荷の間のクーロン力

静電気力は，クーロンの法則を満たす力なので，クーロン力ともいう．

クーロン力は，力であるから，ベクトル量である．ベクトルとして表現しよう：

原点に点電荷Q，位置ベクトル　$\vec{r}$ の位置に点電荷qがある．
qが $\vec{r}$ の位置で受ける力は，向きまで含めて

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}$$

と表せる．$\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ は $\vec{r}$ の向きを持つ単位ベクトルで大きさは「単位無しの 1」．

したがって

$$\text{大きさ：}\quad \left|\vec{F}\right| = F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qQ|}{r^2}\left|\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qQ|}{r^2}$$

$$\text{向き：}\quad \overrightarrow{F} \parallel \pm\vec{r},$$

複合は q と Q が同符号のとき＋(原点から遠ざかる，反発力),
異符号のとき − （原点に向かう，引力）

Qが原点でない位置 $\vec{r}_0$ にあるとき　（たくさんの電荷によるクーロン力を計算するときに必須）
原点を移動するだけだから　（原点をどこにとるかは，まったく人為的なもの）
$\vec{r}$のかわりに$\vec{r}-\vec{r}_0$を使えばよく

$$\vec{F} = k\frac{qQ}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right)$$

となる．$\vec{r}-\vec{r}_0$は$\vec{r}_0$　の先端から$\vec{r}$の先端まで　のベクトルである．

4．クーロン力と重ね合わせの原理

たくさんの電荷によるクーロン力を与える法則は，非常に簡単かつ重要な「重ね合わせの原理」：

電荷 1 と電荷 2 が 3 番目の電荷に及ぼすクーロン力は
電荷 1 だけがあるときのクーロン力と，
電荷 2 だけがあるときのクーロン力の
ベクトル和となる

にしたがう．

重ね合わせの原理は自明ではない．
すでにある力が大きいと，さらに加えた力は何の効果も及ぼさなくなる，などという場合があっても不思議なことではない．

クーロン力が重ね合わせの原理に従うことを実験的な事実として受け入れる．

重ね合わせの原理があるために，たくさんの電荷によるクーロン力の計算は「ベクトル和をつくるだけ」の簡潔で単純な作業になる（面倒くさいかもしれないが）．

2 個の点電荷($\vec{r}_j$にあるQ_j，$j = 1,2$)が 3 番目の電荷($\vec{r}$ にあるq)に及ぼす力：

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\sum_{j=1,2}\frac{Q_j}{\left|\vec{r}-\vec{r}_j\right|^2}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\right)$$

N 個への拡張

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\sum_{j=1\cdots N}\frac{Q_j}{\left|\vec{r}-\vec{r}_j\right|^2}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\right)$$

5，連続な電荷分布によるクーロン力

ここでは，計算を見やすくするために　途中の式では$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$を使わず，比例係数を k としておく．

前スライドで，与えられた点電荷の分布によるクーロン力の計算が実行できる．

しかし，点電荷の数が非常に多いときは，むしろ連続な電荷分布ρ　を使って表現することが多い．

「位置 $\vec{r}_j$に点電荷Q_jがある」　という代わりに
「位置 $\vec{r}_j$ を含む微小体積ΔV_jの内部に電荷密度$\rho(\vec{r}_j)$がある」　と表す．

ΔV_jに含まれる電荷$\Delta Q_j = \rho(\vec{r}_j)\,\Delta V_j$によるクーロン力$\Delta F_j$は，$\Delta V_j$が非常に小さいときは$\Delta Q_j$を点電荷とみなして

$$\Delta\vec{F}_j = k_0 \frac{\Delta Q_j}{\left|\vec{r}-\vec{r}_j\right|^2}\ \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} = k_0 q \frac{\rho\left(\vec{r}_j\right)\Delta \mathrm{V_j}}{\left|\vec{r}-\vec{r}_j\right|^2}\ \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}$$

ΔV_jが無限小の極限では（$\vec{r}_j$を連続的に動かすため，記号を変えて$\vec{r}'$と書く）

$$d\vec{F} = k_0 q \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|},\quad k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

この力を寄せ集める（積分する）と

$$\vec{F}\,(\vec{r}) = \iiint_V d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

となる．

6. クーロン力の成分表示

クーロン力はベクトル量だから，各座標方向の成分を計算する必要がある．

このとき，スライド前ページで得た積分も，成分毎の積分となる．

前スライドの最後の式は

$$\vec{F}(\vec{r}) = \iiint_V d\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

であった．

この式を読み直す：

$\vec{r}' = (x', y', z')$ の位置にある電荷密度　$\rho(\vec{r}')$に，　その位置にある微小な体積　$dV' = dx'dy'dz'$　をかけると，dV'の中の微小な電荷となる．

$\vec{r}'$ にある微小な電荷が　$\vec{r}$　にある点電荷　q　におよぼすクーロン力は

$$d\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')dV'$$

このベクトルの向きは$\vec{r}-\vec{r}' = (x-x',\ y-y',\ z-z')$だけで定まる．

体積 V の内部全域を　$\vec{r}' = (x', y', z')$ が動きながら$d\vec{F}$　を寄せ集める操作を積分で表す．
積分の結果はベクトルだが，成分で表すと

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(F_x(x,y,z), F_y(x.y.z), F_z(x.y.z)\right)$$

として，

$$F_x(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(x',y',z')}{\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}^3}(x-x')dx'dy'dz'$$

$$F_y(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(x',y',z')}{\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}^3}(y-y')dx'dy'dz'$$

$$F_z(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(x',y',z')}{\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\}^3}(z-z')dx'dy'dz'$$

7. 保存力，仕事，位置エネルギー

クーロン力は，力学（自然科学の基礎）で学んだ「保存力」である．

保存力であるクーロン力によって運動する物体は，

力学的エネルギー ＝ 運動エネルギー　＋　位置エネルギー

が常に同じ値に保たれる．

とくに，保存力を受けて運動し，もとの位置に戻ってきた物体は，（もとの位置だから位置エネルギーが同じなので）速さも出発のときと同じになっている．

位置エネルギーを座標で微分する（さらに，符号を反転する）と，力になる．
位置エネルギーを山の高さと考えると，力は山の斜面の傾きである．
１次元の運動では，位置エネルギー $U(x)$ と力Fの関係は

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

となる．

3 次元の運動では，

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y},\ -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\mathrm{grad}\ U = -\nabla U$$

となる．

保存力を受けながら物体が $d\vec{r}$ だけ変位したとき，保存力$\vec{F}$がする仕事$\vec{F}\cdot d\vec{r}$は，位置エネルギーの全微分dUで表せる：

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\nabla U \cdot d\vec{r} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy\ -\frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU$$

クーロン力が保存力であることを示すには，微分するとクーロン力になるような位置エネルギーを提示すればよい．

8　クーロン力の一エネルギー

ここでは，計算を見やすくするために　途中の式では$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$を使わず，比例係数を k としておく．

原点に点電荷Qがあるとき，$\vec{r}$にあるてん電荷qの位置エネルギー$U(\vec{r})$は

$$U(\vec{r}) = k\frac{qQ}{r}$$

である．実際

$$\vec{F} = -\nabla U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

を計算すると

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{qQ}{r}\right) = kqQ\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = kqQ\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = kqQ\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{-1}{r^2}\right) = -kqQ\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial U}{\partial y} = -kqQ\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial U}{\partial z} = -kqQ\frac{z}{r^3}$$

より

$$\vec{F} = kqQ\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = k\frac{qQ}{r^3}\vec{r} = k\frac{qQ}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

となり，たしかにクーロン力が導かれる．

微分により定数項が消えるので，位置エネルギーは定数だけ不定である．
どこかに基準点を定め, その点の位置エネルギーを 0(基準値)とすることで, この不定正は取り除かれる．
位置エネルギー

$$U(\vec{r}) = k\frac{qQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

の基準点は，無限遠($r \to \infty$)である．

どこに位置エネルギーの基準点をとるかは自由だが，理論的な扱いでは力が 0 となる位置を基準とすることが多い．

実用的には，だれにでも共通でしかもアクセスが易しい位置（たとえば大地）を基準とすることが多い．

原点以外の位置$\vec{r}_0$にQがあるとき，原点を移動するだけだから

$$U(\vec{r}) = k\frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

9．位置エネルギーの重ね合わせ

クーロン力が重ね合わせの原理を満たすのだから，位置エネルギーも重ね合わせの原理を満たす．

実際，N個の点電荷がそれぞれクーロン力$\vec{F}_j$をおよぼし，その力が位置エネルギーU_jから計算されるときすなわち$\vec{F}_j = -\nabla U_j \quad (j = 1,2,\cdots,N)$のとき

$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_N$

から計算した力$\vec{F}$は

$$\vec{F} = -\nabla U = -\nabla(U_1 + U_2 + \cdots + U_N) = -\nabla U_1 - \nabla U_2 \cdots - \nabla U_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$$

となる．論理を逆にたどることもできるので，

保存力が重ね合わせの原理を満たす　⟵⟶　位置エネルギーが重ね合わせの原理を満たす

ことが言える．

こうして，たくさんの点電荷あるいは連続電荷分布による位置エネルギーは

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \sum_{j=1,N} \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

あるいは

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

となる．