## １．∇ について

【記号】$\frac{d}{dx}$は 1 変数のときの微分記号であるのに対し，∇は変数がたくさんあるときの微分記号であり，3 変数では

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

と，あたかもベクトルであるかのごとく記す．

【スカラー関数との組み合わせ】
空間の各点$\vec{r}=(x,y,z)$に電位という 1 つの実数値（スカラーでありベクトルの成分ではない）$\phi(x,y,z)=\phi(\vec{r})$が与えられる．このとき

$$E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x},\qquad E_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\qquad E_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

のように，$\phi$の各偏微分係数を各方向成分とするベクトルが電場となる．上式を∇を用いて

$$\vec{E}=-\nabla\phi$$

と表す．∇という”ベクトル”と$\phi$というスカラーから導出されるベクトルである．

【ベクトル関数との組み合わせ】
クーロンの法則の別表現として「電場（電気力線）の湧き出しや吸い込みがあるところには必ず電荷があり，電荷が無いところには湧き出しや吸い込みがない」．この内容を数学的に表したのがガウスの法則

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$$

であり，ガウスの法則を微小な体積$dV=dxdydz$に適用したのが

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

である．左辺を２つの”ベクトル”$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$と$(E_x,E_y,E_z)$の内積をとったものと（形式的に）とらえて

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(E_x,E_y,E_z)=\nabla\cdot\vec{E}$$

と書き直す（”・”が内積の記号）．こうして，ガウスの法則（したがってクーロンの法則）が電場の空間的な性質として

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

と書かれる．

【ラプラス演算子】
ガウスの法則

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

に$\vec{E}=-\nabla\phi$を代入し，符号を右辺につけなおすと

$$\nabla\cdot(\nabla\phi)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{-1}{\varepsilon_0}\rho$$

ここに現れた「$\phi$の３次元の２階微分係数」を$\Delta\phi$，$\nabla^2\phi$などと表す：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\Delta\phi=\nabla^2\phi$$

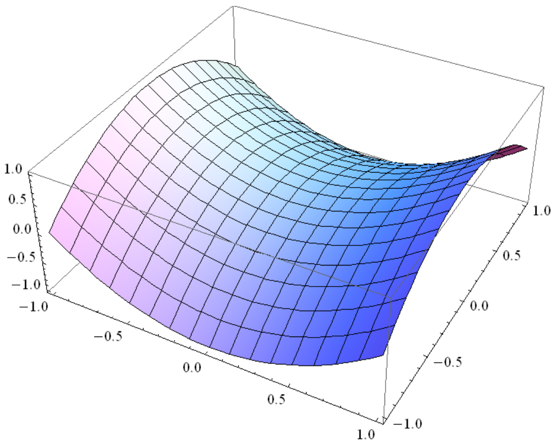
$\nabla^2$はベクトル$\nabla$と自分自身の内積という意味である．あるベクトルと自分自身の内積は，絶対値の二乗と同じになるので，このときに限り「・」を付けずに右肩に２を記すという慣習がある．たとえば$\vec{r}\cdot\vec{r}=r^2=\vec{r}^2$

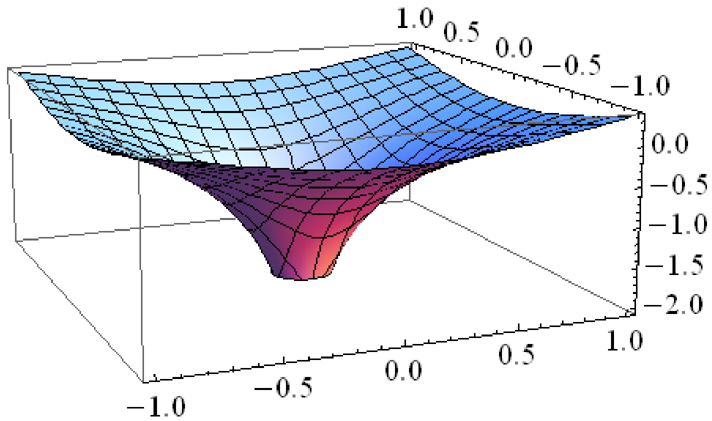
## ２．ラプラス演算子について

スカラー関数$\phi$からその２階微分係数を求める演算を表す記号$\Delta$あるいは$\nabla^2$をラプラス演算子という．

ラプラス演算子は，１次元であれば単に２階微分係数を求める$\frac{d^2}{dx^2}$に他ならない．$\frac{d^2f}{dx^2}$は関数$f$のグラフの曲りの程度を表す．$\Delta\phi$は$\phi$の「x 方向の曲がり方」と「y 方向の曲がり方」と「z 方向の曲がり方」の和を表す．１次元のとき各点で$\frac{d^2f}{dx^2}=0$ならば，$f$のグラフが直線となる．しかし$\Delta\phi=0$のときは平面（２次元）になるとは限らない．x 方向に正で曲がっていても y 方向に負で曲がっていて曲がり方が相殺すれば$\Delta\phi=0$となる．

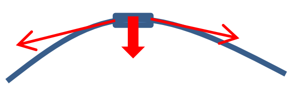
下図左は $z=f(x,y)=x^2-y^2$，右は$z=f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ ． 両方とも２次元で$\Delta f=0$



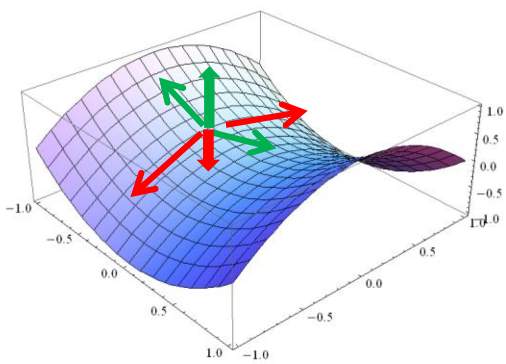



３次元で$\Delta f=0$となる代表格が$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$．

【力のつりあいとラプラス方程式】



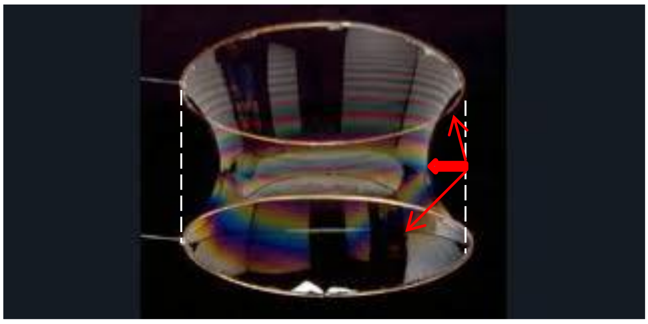
右図のように張られた弦が曲っていると，弦の微小部分に作用する力（赤細矢印　接線方向に向く）の両端で向きが異なり，下向きの力（赤太矢印）を発生する．弦がつり合いの状態にあって静止するためには，したがって，曲がっていることはできず$\frac{d^2f}{dx^2}=0$と成る必要がある（弦を張った方向に$x$軸をとり弦の変位を$f$とした）．



２次元の膜あるいは金属板の場合，$x$方向の張力が上向きの力を発生しても，y 方向の張力が下向きの力を発生して相殺すればつり合いを保つことができる．こうして

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

が静止状態でつり合いを保つ条件となる．2 個のリングを両端にした石けん膜が，その表面張力によって作る形を見ると，右図のようになる．縦方向の曲がり方と横方向の曲がり方が相殺しているのがわかる．もし点線のような円筒形の膜表面になったとすると，円の半径を小さくする力が働くのでつり合いが成立しない．



こうして剛体の静的なつり合いによる形を決めるのはラプラス方程式

$$\Delta\phi = 0$$

である．

一方，各方向の力の総和が 0 にならないときは，力に比例した加速度が発生する．すなわち

$$\Delta\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

という式に従う運動が生じる．この式は波動方程式と呼ばれる．

また，膜のいろいろな点に外力を加えるとき（一点を突き上げる，全体に圧力を加える，など），力を加えた点では，その外力を打ち消す力が膜から加わる．外力を$u(\vec{r})$で表し，各点でのつりあいを式で表すと

$$\Delta\phi = u$$

となる．この式がポアソン方程式である．

以上は弾性体のつり合いをベースにしてラプラス方程式，ポアソン方程式，波動方程式を示した．電気現象には電気現象の原理があり，その原理に基づいて静電位のラプラス方程式，ポアソン方程式が導かれることをすでに学んだ．流体の速度を論じるときにもラプラス方程式が現れる．熱の伝達についても同様である．思いつくだけでもラプラス演算子が活躍する場がこんなにある．

### 3. 線積分と全微分

「電場の線積分の符号を変えたものが電位差である」と定義されている．式で表すと

$$\phi(B) - \phi(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

となる．線積分の両端の位置 A,B を非常に接近させ，A の位置ベクトルを$\vec{r} = (x, y, z)$，B の位置ベクトルを$\vec{r} + d\vec{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$とすると，上式左辺は $\phi$ の全微分

$$d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot(dx, dy, dz) = \nabla\phi\cdot d\vec{r}$$

である．右辺は，非常に小さな区間の定積分となり，積分と被積分関数×dr が一致するので

$$-\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\vec{E}(x, y, z)\cdot d\vec{r}$$

けっきょく，両辺を比較すると

$$\nabla\phi\cdot d\vec{r} = -\vec{E}(x, y, z)\cdot d\vec{r}$$

となり，$d\vec{r}$の取り方は自由なので

$$\vec{E}(x, y, z) = -\nabla\phi$$

となる．

**Q2. 「10 kV の電位差で静止状態から加速した」状況を説明してください．**

2 個の電極を離しておき，電位差 10kV を与える．電極周囲には電場ができている．電子を負電極に近づけると

（負電極には負電荷があるので）反発力を受ける．負電極上で静止していた電子が反発力により運動を開始し，速度が増し，ついには正電極に激突する．出発時にもつ全エネルギーはクーロン力による位置エネルギーだけ，衝突時にもつ全エネルギーは運動エネルギーだけであり，クーロン力が保存力なので全エネルギーが保存し，最初の位置エネルギーと最後の運動エネルギーの値が等しい．正電極の電位を 0 とすると負電極上の電子の位置エネルギーは 10 keV(1 万電子ボルト)であり，これを J に直すには $1.6\times10^{-19}$ C を乗じればよい．こうして

$1.6\times10^{-15}$ J の運動エネルギーをもつ

ことがわかる．

かつては，表示装置にブラウン管というものが使われていた．ブラウン管内部には電子銃と呼ばれる部品があり，そこでは 2 個の電極間に高い電位差を与えて電子を加速し，鋭い電子ビームにしてスクリーンにあて，蛍光物質を光らせて描画した．現在でも電子顕微鏡は同じ構造をもつ．

医療診断の X 線は，同じように加速した電子を金属にあて，金属から放出される X 線を用いる．

**Q4 電場を $\dfrac{1}{\varepsilon_0}\times\dfrac{\sigma}{2}\times2=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ としたが，なぜわざわざ $\dfrac{\sigma}{2}$ をくくりだしているのですか？**

1 枚の平面があり，電荷が面密度 σ で均一に分布しているとき，この面を挟み込む閉曲面でガウスの法則を適用すると，平面の両側に互いに反対向きの電場があるので，$E\,S_{上面}+E\,S_{下面}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S\rightarrow E=\frac{\sigma}{2\varepsilon0}$となる．2 枚の平面に± σ の電荷密度があるときは，1 枚の平面電荷分布による電場の重ね合わせなので，2 面の間の空間では

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\times2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

となる．このような論理を式に書き込んだつもり．

**Q5. 偏微分の計算ができませんでした．**

$\phi(x,y,z)=\phi_0\mathrm{e}^{-a(x^2+y^2+z^2)}$の$x$による偏微分係数は，他の変数 y と z を定数としてよいので

$$\phi(x,y,z)=\phi_0\mathrm{e}^{-a(y^2+z^2)}\mathrm{e}^{-ax^2}$$

となり

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\phi_0\mathrm{e}^{-a(y^2+z^2)}\frac{de^{-ax^2}}{dx}$$

つぎに$u(x)=-ax^2$とおいて，合成関数の微分法を用いると

$$\frac{de^{-ax^2}}{dx}=\frac{de^u}{du}\frac{du}{dx}=e^u\frac{du}{dx}=e^{-ax^2}(-2ax)$$

よって

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\phi_0\mathrm{e}^{-a(y^2+z^2)}e^{-ax^2}(-2ax)=-2a\phi_0e^{-a(x^2+y^2+z^2)}\times x$$

y,z による偏微分もまったく同様なので，「$\times\,x$」を「$\times\,y$」,「× z 」に書き換えて

$$\vec{E}(x,y,z)=-\nabla\phi=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=-2a\phi_0\mathrm{e}^{-a(x^2+y^2+z^2)}(x,y,z)=-2a\phi_0\mathrm{e}^{-ar^2}\vec{r}$$

となる．

**最高の電位の位置が原点となるのが分かりません．**

暗黙に仮定してしまった$\phi_0>0,a>0$を問題にしているのかもしれない．不完全な問題は，適宜条件を補って解

答を試みてもらえるとうれしい．

$$\phi_0 \mathrm{e}^{-a(x^2+y^2+z^2)} = \phi_0 e^{-ar^2} = \frac{\phi_0}{e^{ar^2}} \ (a > 0, \phi_0 > 0)$$

この電位の関数は原点からの距離 r だけに依存して変化するので，原点から等距離の点をつないだ面（原点を中心とする半径 r の球面）の上では，どこも電位が等しい． r を大きくすると，

$$e^{-ar^2} = \frac{1}{e^{ar^2}}$$

より右辺で分母が大きくなるので $\phi$ は単純に減少する．したがって原点で最大値となる．