１．電位

クーロン力を試験電荷で割り，空間の性質である電場を定義した：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

同様に，クーロン力の位置エネルギーを試験電荷で割ると，エネルギーに対応する空間の性質を定義することができる：

$$\phi = \frac{U}{q}$$

この量ϕを電位（または静電ポテンシャル）と呼ぶ.

環境が同じでも試験電荷の符号を反転するとクーロン力の位置エネルギーは反転する．また試験電荷の大きさに比例してエネルギーも変わる．しかし電位は環境の電荷分布が同じなら，注目する位置の空間の性質として符号も大きさも一定である.

クーロン力の位置エネルギーは，エネルギーの基準とした位置（$U(\vec{r}_0) = 0$とすることにした位置）から注目する位置まで試験電荷が移動したとき，クーロン力がする仕事の符号を反転したものである：

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

したがって，**位置$\vec{r}$における電位$\phi(\vec{r})$は**

$$\boldsymbol{\phi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

となり，基準に選んだ位置（$\phi(\vec{r}_0) = 0$とすることにした位置）から注目する位置まで，電場を線積分して符号を反転したものである.

電位は 2 点間の差（電位差）だけが測定できる量である．基準点を決めない限り，ある点の電位を決めることが出来ない．2 点間の電位差は

$$\phi(\vec{r}_{\mathrm{B}}) - \phi(\vec{r}_{\mathrm{A}}) = -\int_{\vec{r}_{\mathrm{A}}}^{\vec{r}_{\mathrm{B}}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

である.

2. 電位と電場

電位に慣れるために，一様な電場 $\vec{E}$ を考える.

【電位の高低と電場の向き】

原点を基準として，位置 $\vec{r}$ *の電位は*

$$\phi(\vec{r}) - \phi(0) = -\int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot \int_0^{\vec{r}} d\vec{r} = -\vec{E} \cdot (\vec{r} - 0) = -\vec{E} \cdot \vec{r} = -Er\cos\theta$$

$\vec{r}$が$\vec{E}$の向きと同じなら，$\phi(\vec{r}) - \phi(0) = -Er < 0 \to \phi(\vec{r}) = \phi(0) - Er \to \ \phi(\vec{r}) < \phi(0)$

すなわち，電場の方向に進むと電位が下がる.

【電位の高低と電荷の正負】

電場は，正の電荷から負の電荷に向かう（正の試験電荷が受ける力の向き）から，

正（負）電荷に近づくと電位は高く（低く）なる

【電場の向きと異なる方向の電位差】

電場方向の移動距離$(r\cos\theta)$と電場の積　：　$\phi(\vec{r}) - \phi(0) = -Er\cos\theta$

【電位の単位】

電位の定義　$\phi = \frac{U}{q}$ から，

基準の電位差は「1C の電荷が 1J のエネルギー差をもつ電位差」

基準の電位差を 1 V （ボルト）と呼ぶ.

電場と電位の関係　$\phi = -Er$ から，$E = -\frac{\phi}{r}$

したがって,電場の単位は 1V/m

3. 電位とエネルギー

ここで，再度，電場の単位が 1 N/C = 1 V/m となることについて，確認しておこう．【V/m = N/C】

まず，1Ｖの電位差は， 1C の電荷が 1V の電位差により 1J のエネルギー差が生じる．
同じエネルギー１J は 力学的な仕事として，1N の力で 1m 移動するときの値である．
こうして

$$1\,\mathrm{J} = 1\mathrm{C} \times 1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{N} \times 1\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad \mathrm{J} = \mathrm{CV} = \mathrm{Nm}$$

この関係を組み替えると

$$1\,\mathrm{C} / 1\,\mathrm{N} = 1\mathrm{V} / 1\mathrm{m} \qquad \rightarrow \quad \mathrm{N/C} = \mathrm{V/m}$$

【eV】
新聞の科学欄などにも時々出てくる eV (電子ボルト，エレクトロン・ボルト)というエネルギーの単位．
電子の電荷は負の素電荷，約 1.6×10^{-19} C である．
電子１個が 1V の電位差でもつエネルギー差を 1 eV という．

$$1\,\mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \quad \mathrm{J}$$

となる．

1 eV は，日常的な感覚では非常に小さなエネルギーだが，原子や分子といった微視的な世界では都合の良い大きさなのである．
たとえば，化学反応で放出・吸収されるエネルギーは，その反応に関与する分子 1 個あたり， 数 eV 程度である．

電池の電圧が 1V 程度なのも，これが理由となっている．

光とは，振動数によってエネルギーが決まる粒子（光子）が光速度で移動するものである．可視光の光子の 1 個のエネルギーが 2 eV 程度である．夏の海水浴で日焼けするのは，このエネルギーを吸収した皮膚の分子が化学反応を起こすからである．また，染料の色は，2eV 程度の光を染料の分子が吸収することによって起きる．一方，空気を構成する窒素や酸素は非常に小さい分子で，もっと高いエネルギー（紫外線）の光子を吸収する．光通信に用いる赤外線の光子は 1.3 eV 程度のエネルギーをもつ．

4. 静電場の周回積分＝０

【静電場（静止した電荷がつくる電場）の性質】
すでに学んだ性質は
１．ガウスの法則（クーロンの法則の「なれの果て」）

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV \ \rightarrow\ \nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

２．静電場には電位がある

$$\vec{E} = -\nabla\phi,\ \ \phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

の２つであった.

ここでは，「電位がある」ことを，電位を使わずに表現する.

それには，電位の定義に現れる線積分を，閉じたループにそって一周する径路Cで行う．このような線積分を周回積分と呼び

$$\oint_{\mathrm{C}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

と表す.

電位は，基準点の電位を決めると，他の位置の電位が（2 点を結ぶ積分径路によらず，点の位置だけで）決まってしまう．*だからこそ$\phi(\vec{r})$のように表現する(電位の定義に線積分の径路は指定しない)*.
そうすると，周回積分で出発点に戻ると同じ電位となるので

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} \ \rightarrow\ \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

結論として
電位の存在から「静電場の周回積分は，周回路によらず，0 となる」ことが導かれた.
逆も証明できるが，ストークスの定理を学ばなければならないので，

ここでは
「電場の周回積分が 0 になることは，
　それが電位から導かれる電場であること，
　したがってクーロン力によるものであることと同じ」
という事実を受け入れる.

5. 電位の計算法

電荷分布から電位を求める計算は，位置エネルギーを求める計算とほとんど同じ（試験電荷で割るだけ）．

基準点は，電場が 0 となる「無限遠」にとる．

原点に電荷Qがある：

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

位置 $\vec{r}_0$に電荷Qがある：

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

重ね合わせの原理が成り立つ：

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1,\cdots N}\frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

連続な電荷分布では，総和が体積積分に変わる：

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}dV'$$

6. 等電位面

位置エネルギーを直感的に理解する道具として，等高線を用いた．
電位についても「等電位面（線）」をしばしば用いる．

【等電位面（線）】
電位が同じ点をつなげてできる面（線）．
3 次元空間なら，等電位面になる．
3 次元空間の断面なら，等電位線になる．

右上図は，原点に点電荷があるときの等電位面群を示した．
右下図は，原点に点電荷があるときの電位の，xy 平面での値を，z 軸に電位をとって示したグラフと，等電位線群を重ねて描いた．

等電位面（線）群は，電位を等間隔で変える．
・　となりあう面（線）の間隔が狭ければ，同じ電位差が短い距離で実現するので，電場が大きい．

等電位面（線）と電場は直交する：

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, -\frac{\partial\phi}{\partial y}, -\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

を用いて説明する．それには偏微分法で学んだことを用いる：

座標を$\vec{r} = (x, y, z) \to \vec{r} + d\vec{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$*と，微小に変えたとき，*関数$\phi$の微小な変化（$\phi$*の全微分*）は

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial y},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

この座標の変化が等電位面上で起きるとき，等電位だから，

$$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

である．すなわち電場と等電位面内の向きをもつベクトル$d\vec{r}$とは直交する，いいかえると

電場と等電位面は直交する

7. 電気双極子による電位と電気力線

電荷分布から電場を計算したいとき，先に電位を計算して，電位から電場を求める方が計算が楽な場合がよくある.
例として，ここでは，電気双極子による電場の計算に電位を利用する

【電気双極子】
最も簡単な電荷分布は「点電荷が 1 個だけある」というものだろう.
帯電した球なら「点電荷 1 個」でモデル化できる.
現実の世界は，ほとんどの場合に帯電していない.
帯電していないなら，総電荷が 0 なので，電気現象とは無関係と思うかもしれない.

しかし，近寄ってみると「正電荷の分布の中心と，負電荷の分布の中心が，わずかにずれている」場合がよくある.
総電荷が 0 であっても，電気的な振る舞いを考える場合，最も簡単なモデルが**電気双極子**である.

それは，左上図のように

距離$d=2a$だけ離れて，正の点電荷qと，負の点電荷$-q$がある

というもの．これは，分子（小さいものでは水，大きい物ではタンパク質）の電気的な振る舞いを知る場合の基本モデルとなる.

双極子とは，極（特異的な場所，点電荷）が対になっているもの，という意味である.

数学的には，任意の電荷分布を「双極子」「四重極子」「八重極子」と展開する方法の，最初の近似に相当する.

【電気双極子がつくる電位】
左上図のように，座標原点に電気双極子の中点を置き，正負の電荷を結ぶ方向を z 軸，これと直交する軸を y 軸とする.
y z 平面内，原点から距離 r，y 軸から角 θ の方向にある点 P（y， z）における電位を求める.

この図の状況だと，P から正電荷までの距離r_+が，負電荷までの距離r_-よりも短いので，正電荷による電位が優位である.
これを数学的に表現しよう：

- P の位置座標は(y,z) ，正負それぞれの電荷の座標は $(0,a)$ と $(0,-a)$
- 正負それぞれの電荷から P までの距離は

$r_+=\sqrt{y^2+(z-a)^2},\ r_-=\sqrt{y^2+(z+a)^2}$

- 電気双極子の長さ $d=2a$にくらべて，ずっと遠くから眺めるとする： $a\ll r=\sqrt{y^2+z^2},\ a\ll r_+,\ a\ll r_-$

・・ $r_+=\sqrt{y^2+(z-a)^2}=\sqrt{y^2+z^2-2az+a^2}\simeq\sqrt{y^2+z^2-2az}=\sqrt{r^2-2az}=r\sqrt{1-\frac{2a}{r}\left(\frac{z}{r}\right)}$,

・・ $r_-\simeq r\sqrt{1+\frac{2a}{r}\left(\frac{z}{r}\right)}$

・・ $|x|\ll 1$ のとき $\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}\simeq 1+\frac{1}{2}x,\quad \frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}\simeq 1-x.$

$\left|\frac{z}{r}\right|=|\sin\theta|\le 1$ だから $\left|\frac{2a}{r}\left(\frac{z}{r}\right)\right|\le\left|\frac{2a}{r}\right|\ll 1$

・・　$r_+ \simeq r\sqrt{1-\frac{2a}{r}\left(\frac{z}{r}\right)} \simeq r\left(1-\frac{a}{r}\left(\frac{z}{r}\right)\right)$,　$\frac{1}{r_+} \simeq \frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\left(\frac{z}{r}\right)\right) = \frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\right)$, $\frac{1}{r_-} \simeq \frac{1}{r}\left(1-\frac{a}{r}\sin\theta\right)$

・　P における電位の計算：

$$\phi(y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\right) - \frac{1}{r}\left(1-\frac{a}{r}\sin\theta\right)\right\} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{2a}{r}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{r^2}\sin\theta$$

【電気双極モーメント】

電気双極子にとって基本的な量は

１．電荷の大きさ q

２．電荷間の距離 d

３．負電荷から正電荷に向かう方向

である．すぐ上の電位の式，最右辺には，qとdが積の形で現れているので，

・大きさ： qd ,

・向き：　負電荷から正電荷に向かう

電気双極子モーメント $\vec{p}$ というベクトルにより電気双極子の状態を表すことができる．

電気双極子モーメントを用いて電位を記すと

$$\phi(y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\vec{p}|}{r^2}\sin\theta$$

ここで，点 P の位置ベクトル $\vec{r}$ と電気双極子モーメント $\vec{p}$ のなす角 $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$を用いると

$$\phi(y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\vec{p}|}{r^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\vec{p}||\vec{r}|}{r^3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

となる．

【双極子電場の計算】

ベクトルによる表示$\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$は，座標軸の向きによらず成立する．そこで，双極子モーメントが

$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$となるように座標軸をとりなおし，位置ベクトルを$\vec{r} = (x, y, z)$とする．

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{r^3}, \quad r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{df}{dr}$$

電場は$\vec{E} = -\nabla\phi$の計算により求まる．x 方向偏微分は

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(p_x x + p_y y + p_z z)r^{-3}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{p_x r^{-3} + (p_x x + p_y y + p_z z)\left(\frac{x}{r}\right)(-3)r^{-4}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{p_x r^{-3} + (p_x x + p_y y + p_z z)\left(-\frac{3x}{r^5}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5}\left(r^2\vec{p} - 3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right)\text{の}x\text{成分}$$

こうして

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}\,r^2}{r^5}\right)$$

【磁気双極子】

正負の電荷の代わりに，磁石の南北極をおくと磁気双極子ができる．磁気双極子モーメントがつくる磁場は，電気双極子がつくる電場と相似である．逆に，この磁場があれば，その源は磁気双極子である．興味深いことに，リング状の電流は双極子の磁場をつくるので，磁気双極子はリング状の電流であると考えてよい．

8. 電気双極子が電場から受ける力

電気双極子が電場によりどのような力を受けるか，考えよう.

【磁気双極子との関係】

棒磁石が磁場から受ける力は，電気双極子が電場から受ける力と相似である.

棒磁石は磁気双極子（のあつまり）と考えてよい.

【一様な電場$\vec{E}$ によるトルク（左図）】

電気双極子は，$\pm q$の電荷が距離d *を隔てて結合したもの.*

正電荷$+q$は力 $q\vec{E}$ を受け，負電荷$-q$はこれと逆向きの力 $-q\vec{E}$ *を受ける.*

２つの力は偶力となり，電気双極子を回転させようとする.

その偶力によるトルクは

$$\vec{N} = \vec{d} \times q\vec{E} = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

電気双極子モーメントが電場と直交するとき，最大のトルクを受ける.

電気双極子の正電荷側が，電場の向きに（電位の低い方向に，電場をつくる負電荷の方向に）ひかれるように回転しようとする.

電気双極子モーメントが電場と平行になると，トルクは 0 となる.

電気双極子モーメントが電場と同じ向きが，安定な平衡位置.

電気双極子に加わる合力は 0 であり，電気双極子は（回転しても）移動するような力を受けない.

【不均一な電場による力（右図）】

・ 一様な電場の*ときと同様に，トルクを受ける*

・ 合力は 0 でない.

・ 正負の電荷が受ける力の大きさが異なるので，電場中を移動するような力を受ける.

・ 回転に関して安定な平衡位置のあたりでは，電気双極子は電場の強い方に引かれる.

・・・・ （磁気双極子の場合）砂鉄が磁石に引かれるのは，この力による

9. 水分子の電気双極子モーメント

- 分子は原子から構成される.
- 原子の種類により，電子を引きつける能力が異なる.

- 酸素原子と水素原子からなる水分子では，酸素原子が水素原子から電子をひきつける.
- 酸素原子付近に負電荷の中心がある.
- 各水素原子付近に（電子がいなくなったため）正電荷があり，2 個の水素原子を結ぶ線分の中点付近に正電荷の中心がある.
- 水分子の電荷分布は，モデルとして電気双極子を採用できる.
- 水の電気双極子モーメントは，最初からある（後述メタンの場合と比較せよ）永久双極子モーメントという.

- メタン分子 CH_4 は，正四面体の頂点にＨがあり，中心にＣがある.
- Ｃが負電荷の中心，各 H に正電荷があり 4 個の正電荷の中心は 負電荷の中心と一致する.
- メタン分子は，電気双極子をもたない.
- ただし，メタン分子が振動すると，電気双極子モーメントが発生する.
- また，電場の中におかれると，電気双極子モーメントが発生する.