

1 回路部品としてのコンデンサー

- コンデンサー（英語ではキャパシター）は、電気を蓄える装置である：2枚の導体板に正負の電荷を分離して蓄える。
- 2枚の導体板を**電極**という。
- コンデンサーの祖先は、第一章で紹介したライデン瓶である。
- コンデンサは、電極間を満たす物質の種類や、電極の構造により、様々な名称がある。
- 電解コンデンサー、フィルムコンデンサー、マイカコンデンサー、タンタルコンデンサー、チタンコンデンサー、セラミックコンデンサー、オイルコンデンサー、可変コンデンサー
- また、半導体集積回路の中にコンデンサーを構造の一部として組み込む。
- コンデンサーは、電気を蓄え必要なときに放出するという、いわば**電気エネルギーの貯蔵庫**として使われる場合もあるが、
- それ以外の用途がむしろ多い。たとえば、**信号波形を変える**目的で使われる（後で学ぶ）。

2. 原理

コンデンサーに電気を蓄える作業を充電という。

コンデンサーから電気を流出させる作業を放電という。

コンデンサーの2つの電極に、導線で電池の両極を接続して充電する。

最終的には、電池の正（負）極と接続されたコンデンサーの電極は、電池の正（負）極と同じ電位になる（導体の性質）。

十分に時間が経つとそれ以上充電しなくなり、導線を取り除いても（スイッチを切っても）、コンデンサーに蓄えられた電荷は電極に留まる。

コンデンサーが蓄えた電荷の量と、その電荷を蓄えるために必要だった電位差に注目する。

同じ電位差でより多くの電荷を蓄えるコンデンサーは、**電気容量**（単に**容量**という）が大きいという。

コンデンサーの能力を容量で表現する。

電荷を蓄える方法は「電池をつなぐ」以外にも考えられる。

- ・ 摩擦電気で正電荷をもった棒を一方の電極に接触すると、その電極が正に帯電する。

このとき他方の電極を接地（大地と接続、アース）しておくとし、正電極による静電誘導で、こちらには負電荷が現れるから、その後に接地を切り離す。

内容的には上と同じだが

- ・ 絶縁体でできたベルトコンベアーに電荷をのせて、電極に運ぶ。（バンデグラフ起電機の構造）
- ・ コンデンサーの電極を擦って摩擦電気を起こす（容量の大きなコンデンサーは、2つの電極を導体でつなげて（ショートして）保管する。

（摩擦電気で非常に大きな電気エネルギーをため込むので危険）

すでに正（負）に帯電した電極に、さらに正（負）電荷を帯電させようとするとし、反発力があるので仕事が必要になる。

すなわち、コンデンサーを充電するには仕事が必要。コンデンサーは外部から仕事をされて、自らの電氣的なエネルギーを増やす。

- ・ 電池で充電するときは、電池に内蔵された化学エネルギーを用いる。
- ・ バンデグラフのような場合は、力学的なエネルギーを用いる。

電気容量と、蓄えた電荷あるいは充電電圧を使って、蓄えた電氣的なエネルギーを表すことができる。

3. 平行板コンデンサー

コンデンサーにはたくさんの種類があることはすでに述べた。

電極の形状もさまざまだが、ここでは、最も簡単な**平行板コンデンサー**の性質を調べる。

平行板コンデンサーの考察で得た考え方は、他のコンデンサーにも適用できる。

平行板コンデンサーは、2枚の平板電極を互いに平行に置いたものである。

このコンデンサーを充電すると、両電極の空間を挟んで対向する面（内側の面）に、正負の電荷が分布する。

- ・ 電極の面積が小さく、電極の間隔が広いときは、電荷は外側の表面にまで分布するが、
- ・ 電極の面積が広く、間隔が狭いときは、ほとんどの電荷が内側の表面に分布する。

現実にはあり得ないのだが、モデルとして、**無限に広い電極**を考えると、**電荷分布は均一**になる。

一方、**電極の面積が十分に広くて、間隔が十分に狭いとき**

- ・ 電極の縁が遠くて見えない中央付近の電荷分布は均一としてよい
- ・ 縁付近の面積より、中央付近の面積がずっと広い
- ・ **ほとんど全域で均一な電荷分布をもつという近似**をしても、そう悪くないだろう

【正負の電荷が平行な2平面に均一に分布するときの電場】

- ・ 空間は真空（空気は比誘電率がほとんど1なので、真空と変わらない）
- ・ 電極面積 S 、電極間の距離 d 、蓄えた電荷 $\pm Q$
- ・ 電荷密度 $\pm\sigma$ 、 $\sigma = Q/S$
- ・ 2面に挟まれた空間の電場 E 、電極間の電位差 V

すでに学んだこと：

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{\sigma S d}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{\epsilon_0 S} Q \rightarrow Q = \left(\epsilon_0 \frac{S}{d}\right) \times V$$

4. 電気容量

平行板コンデンサーの充電電圧 V と そのとき蓄えられた電荷 Q の関係 :

$$Q = \left(\epsilon_0 \frac{S}{d}\right) \times V$$

- ・ Q と V は比例する
- ・ V が同じなら, 電極面積 S が大きいほど, また電極間隔 d が小さいほど, Q が大きい
- ・ ・ コンデンサーが電荷を蓄える能力は, 比例係数 $\left(\epsilon_0 \frac{S}{d}\right)$ で表される.

平行板コンデンサーの**電気容量** (電荷を蓄える能力)

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \quad Q = CV$$

電気容量の単位

1V の電位差で 1C の電荷を蓄えるコンデンサーの電気容量を 1F(ファラッド) という

真空の誘電率の単位を F/m とすることを既に述べた. 上式により, 単位の整合性を確認せよ.

例 : $C = 1 \times 10^{-12} \text{ F} = 1 \text{ pF}$ の 平行板コンデンサーの電極面積が $S = 1 \text{ cm}^2$ のとき, 間隔 d はどれだけか.

$$d = \epsilon_0 S / C = (8.9 \times 10^{-12}) \times (10^{-4} / 10^{-12}) = 8.9 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 1 \text{ mm}$$

【 $Q = CV$ の一般性】

どんな形でもよいが, 何個かの導体を配置して帯電させると,

- ・ 静電誘導により電荷分布 ρ が自動的に決まり,
- ・ 空間内の至るところで電場 \vec{E} が定まる : $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$
- ・ 導体 1 と 2 の間の電位差は, $V = \phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$

導体の配置をそのままにして, どの導体に帯電した電荷も k 倍する

- ・ 電荷分布は形をたもったまま k 倍になり, 電気力線の形が変わらずに密度 (したがって電場) が k 倍になる :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla \cdot (k\vec{E}) = \frac{(k\rho)}{\epsilon_0}$$

- ・ 電位差も k 倍になる : $V = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow kV = -\int_1^2 k\vec{E} \cdot d\vec{r}$

したがって

$$Q = CV$$

という比例関係がどんなときにも成り立つ. (例外 : 誘電体があるときは, 電場の強さにより, 誘電率が変化するかもしれない)

5. 誘電率と容量

コンデンサーの電極間を誘電体で埋めると、容量が増加する。

誘電体による遮蔽効果で、電極の電荷が（本当にそこにある真電荷）より小さく見えるため、電位差が小さい。言い換えると、同じ電位差で充電しても、真電荷をたくさん蓄えることができる。

遮蔽の効果で、同じ電場にたいする真電荷が比誘電率倍になるので、電気容量は ϵ_0 を誘電体の誘電率 ϵ で置き換えた値となる。

6. コンデンサーに蓄えたエネルギー

コンデンサーが充電されると、そこには電気的なエネルギーが蓄えられる。

電極間の電位差がすでに V のとき、負電極から正電極に電荷 $dQ > 0$ を運ぶために必要な仕事は
2点間の電位差が V のとき、 dQ の位置エネルギーの差 VdQ に等しい：

$$dU = V dQ$$

この微小な仕事を、電荷がまったく無い状態から、蓄えた電荷が Q_0 となるときまで寄せ集める（積分する）。

電位差 V はそのときに蓄えている電荷 Q に比例し、電荷が移動すると電位差も変わる。 dQ に注目して積分するので、 V を Q で表しておくとう積分しやすい：

$$V = \frac{1}{C} Q \rightarrow dU = VdQ = \frac{1}{C} Q dQ$$

電荷が0の状態から充電を始めて、電荷が Q_0 になるまでに必要な仕事は

$$U = \int_0^{Q_0} \frac{1}{C} Q dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_0} Q dQ = \frac{1}{C} \left[\frac{1}{2} Q^2 \right]_0^{Q_0} = \frac{1}{2C} Q_0^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q_0 V_0$$

となる。

【(1/2) の起源】

よく聞く説明は、「充電の過程を表す $Q - V$ 図の三角形の面積 = (1/2)×底辺(Q_0)×高さ(V_0)
の(1/2)、あるいは積分のときでてくる(1/2)」というもので、正しい説明だが・・・
より一般的な議論が可能である（次スライド）。

7. 電荷系のエネルギー

いくつかの点電荷が、互いにある距離を保ちながら集まり、ある分布を形成している。(たとえば、コンデンサーの両極の電荷分布がそれである。)

電荷は互いに力を及ぼしあうから、電荷が(無限遠で力を及ぼしあわない)ばらばらにあった状態から、その分布を作り出すには仕事が必要である。

仕事は、この電荷系がもつエネルギーとして蓄えられる。

【電荷が1個】

位置エネルギーは考えない。

自分が作り出す電位のなかに自分がいるときのエネルギー(自己エネルギー)は、現在の電磁気学では取り扱わない。

【電荷が2個】

電荷 Q_1 を点 \vec{r}_1 に固定し、 Q_2 を無限遠から近づけて来て \vec{r}_2 で止める。

電荷 Q_1 を固定するには力が必要だが、移動しないのでこの力がする仕事は0。

電荷系がもつエネルギー U_{12} は Q_2 にした仕事と等しく、 Q_1 がつくる電位の中で Q_2 がもつ位置エネルギーと同じである。

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

【電荷が3個】

電荷 Q_1 を点 \vec{r}_1 に固定し、 Q_2 を無限遠から近づけて来て \vec{r}_2 で止めて、固定する。このとき Q_3 は無限遠に留めておく。

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

次に電荷 Q_1 を点 \vec{r}_1 に、 Q_2 を点 \vec{r}_2 に固定して、 Q_3 を無限遠から近づけて来て \vec{r}_3 で止める。

$$U_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}, \quad U_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|}$$

電荷系のエネルギーは、これらの和：

$$U = U_{12} + U_{23} + U_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{Q_3 Q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \right)$$

である。

右辺を総和記号により書き直そう。

j 番目の電荷を止めて置いて k 番目の電荷を無限遠から近づけたときの仕事：

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}$$

の j と k について和をとる。すなわち、まず

$$\sum_{j=1,2,3} \left(\sum_{k=1,2,3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1,2,3} \left(\sum_{k=1,2,3} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1,2,3} \left(\frac{Q_j Q_1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_1|} + \frac{Q_j Q_2}{|\vec{r}_j - \vec{r}_2|} + \frac{Q_j Q_3}{|\vec{r}_j - \vec{r}_3|} \right)$$

ここで $j=1,2,3$ として和をとろうと思うと、分母が 0 になるが、これは自己エネルギーであり除外する。

二重の総和は、外側の j の値を決めておいて内側の総和を実行し、つぎに j の値を変えながら外側の和を実行するしたがって、1, 2, 3 のなかから決められた j と異なる値だけをピックアップして k について和をとらなければならない。

このことを表す総和記号（二重の和だが Σ を 1 個で表し、かわりに和をとる変数 2 個を明記する）が下式左辺であり、その値を右辺に書くと

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{Q_1 Q_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{Q_2 Q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_3 Q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{Q_3 Q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right) \\ &= 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{Q_3 Q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \right) \end{aligned}$$

となり、この系のエネルギーの 2 倍を得る。

2 倍になった理由は、総和記号の計算では、たとえば「1 と 2 の間のエネルギーと 2 と 1 の間のエネルギー」の両方を取りこんでしまったことによる。いわば、総和記号の使い方の不注意による。

「外側の変数が $j=1$ のときは $k=2,3$ 、 $j=2$ のときは $k=3$ 、 $j=3$ のときは和をとらない」とすればよかった。この総和を表す記号

$$\sum_{k > j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}$$

を用いることもある。

こうして

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k > j} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k \neq j} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}$$

となる。この形にしておけば、電荷が何個あっても同じ式で表せる。

中辺の条件は、連続分布の多重積分に移行するとき少しだけわかりにくいので敬遠し、スライドには右辺を記した。

8 電荷系のエネルギー (2)

前スライドの最終の式

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k \neq j} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}$$

を「他の電荷がつくる電位の中に電荷がある」という表現に変える。

それには、電位

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{Q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \dots \vec{r} \neq \vec{r}_k$$

が見えるように、式を変形すればよい。もういちど総和を2重に書くと

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{Q_j Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} = \frac{1}{2} \times \sum_j Q_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} = \frac{1}{2} \times \sum_j Q_j \phi(\vec{r}_j)$$

連続電荷分布のとき、

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV$$

となる。

【コンデンサーに蓄えられたエネルギー】

$$U = \frac{1}{2} Q_0 V_0$$

負極の電位を ϕ_- 、電荷密度を σ_-

正極の電位を ϕ_+ 、電荷密度を σ_+ とすると、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \iint_{S(\text{正電極})} \sigma_+ \phi_+ dS + \frac{1}{2} \iint_{S(\text{負電極})} \sigma_- \phi_- dS = \frac{1}{2} \phi_+ \iint_S \sigma_+ dS + \frac{1}{2} \phi_- \iint_S \sigma_- dS \\ &= \frac{1}{2} \phi_+ \times Q_0 + \frac{1}{2} \phi_- \times (-Q_0) = \frac{1}{2} (\phi_+ - \phi_-) Q_0 = \frac{1}{2} V_0 Q_0 \end{aligned}$$

9. 電場のエネルギー密度

コンデンサーに蓄えた電氣的エネルギーを

- ・ 充電に要した仕事
- ・ 電荷系のエネルギー

として理解することを学んだ。

ここでは、このエネルギーを

電極間の空間の電氣的な歪み、すなわち電場のエネルギー
と、とらえる。

電極間の空間には

$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

がある。コンデンサーに蓄えられたエネルギー

$$U = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} (E d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \times (Sd) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \times \text{電場があるところの体積}$$

となる。

これより、電場のエネルギー密度（単位体積当たりのエネルギー）を

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

と考えることができる。

10 容量の合成

2 個のコンデンサーを並列あるいは直列に接続にしたときの、全体の容量を求める。

【並列】

コンデンサーの電極面積が広がったのだから、容量が増える（和になる）。

並列に接続した 2 個のコンデンサー(容量 C_1 と C_2)を電位差 V で充電する。

各コンデンサーに蓄えられる電荷は

$$Q_1 = C_1V, \quad Q_2 = C_2V$$

となる。全体として蓄えた電荷と充電電圧の関係は

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V = CV, \quad \rightarrow \quad C = C_1 + C_2$$

【直列】

コンデンサーの電極間隔が広がったのだから、容量が減る。

直列に接続した 2 個のコンデンサー(容量 C_1 と C_2)を電位差 V で充電する

各コンデンサーの充電電圧は $V_1 + V_2 = V$ 。

“ が蓄えた電荷は、静電誘導を考慮すると、同じ Q である。

$$Q = C_1V_1, \quad Q = C_2V_2$$

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \rightarrow \quad Q = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} V \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$$