

1. 磁石の特徴

現在では磁気と電気は不可分の現象と考えている。

だが、つい最近（19世紀）までは「磁気と電気はそれらの力に似た性質がある」程度の認識だった。

磁石どうしが互いに力を及ぼす様子を観察すると、

磁石にはN極（地球の北極に引かれる）とS極（南極に引かれる）がある。

帯電した棒の電荷のように、N（S）極には磁気的な正（負）磁荷がある。

同種の磁荷は反発し、異種の磁荷は引きつけあう。地球の北（南）極には磁石としてのS（N）極があると考えればよい。

磁荷の間に作用する力は、電荷の間の力と同じく、逆2乗則を満たすと考えれば説明できる

【磁石をつくるのは磁気双極子】

棒磁石のN極付近だけを他の物体にこすりつけても、棒磁石の残りの部分と切り離しても、そこに現れるのはN極とS極をもった磁石である。

分極電荷のときと同様に、正と負の磁荷を分離して蓄えることができない。

磁気双極子は存在するが、（真電荷に相当する）磁気単極子は現れないのである。

この点が、電荷と大きく異なる。」

2. 磁気と電気が関係する

1820年に、エルステッドが「電気と磁気」の授業をしているとき、**電線に電流が流れると付近の方位磁石の向きが変わる**ことを発見した。

これが、電気と磁気が独立の現象ではないことの最初の認識であった。

その後、電流からどのように磁気が生ずるか、空間の磁気的な性質はどのようなものか、などの研究が急速に発展した。

この章では、**現代的な磁場の定義**を提示する。

古くは、磁石どうしが及ぼす力をもとに磁場を定義した。

現代では、運動する電荷（したがって電流）に働く力によって磁場を定義する。

3. 磁場

磁場は、磁石が周囲に作り出す空間の磁気的な性質を表す量である。（電場が、電荷が作り出す空間の性質を表す量であったのと同様である。）

空間のある位置にどのような磁場あるかは、磁石に加わる力を観測すれば分かる。

【磁石が受ける力から測定した磁場の性質】

- 磁石のN極からS極に向かう磁力線により表現される。
 - 磁場は向きと大きさがあり、ベクトルで表される。磁力線の密度が磁場の大きさを表し、磁力線の接線と磁場の向きが一致する。
 - 広いN極とS極を対向させ、間隔を狭めると、均一な磁場ができる。（平行板電極の電場と同様）
- 前スライドで述べたように、**磁場は電流の周囲にも生じる。**

電流が磁場から力を受けるという現象も発見された。

自然科学では、ある量を定義するのに、その量の測定の仕方を示す。

現代では、磁場の定義に磁石は不要であるとする。すなわち

電流（運動する電荷）が受ける力を測定して磁場を決める。

【磁場による力】

- **試験電荷が運動しているときだけ感じる。**
 - ・ ・ 電荷が受けるクーロン力は、試験電荷が静止していても（運動していても）感じる
- **電荷の速度と直交する力。**
- **電荷の正負により力の向きが反転。**
- **電荷の速さに比例する大きさ。**
- **均一な磁場の中で、電流と磁場ベクトルの外積が力のベクトル**

磁場による力を次ページに図解する

4. 磁場中の荷電粒子の運動

【観測事実】

(a) 荷電粒子が磁場 \vec{B} と垂直な面内で速度 \vec{v} をもつとき、

- ・ 電荷が正なら、左手親指を磁場の向きに立てると他の指が巻く方向に、磁力線に巻き付く。
おなじ面内で円運動を続ける。

- ・ 電荷が負なら、右手

”

(b) (c) 速度の向きが磁場となす角を θ とすると

- ・ $\theta=90^\circ$ すなわち (a) の場合、力の大きさが最大である。
- ・ $\theta \neq 90^\circ$ のとき、力の大きさは $\sin\theta$ に比例して小さくなる。磁力線に巻き付いて螺旋運動をする。

これらを総合して、

荷電粒子 q が 速度 \vec{v} で 一様な磁場 \vec{B} の中を運動するとき、

荷電粒子が受ける力 \vec{F} は

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{外積, ベクトル積})$$

である。 \vec{F} ベクトルは

$$\text{大きさ: } |q\vec{v} \times \vec{B}| = qvB \sin\theta$$

向き: $q\vec{v}$ と \vec{B} が乗る面の法線方向, $q\vec{v}$ から \vec{B} に (180° より小さな角をとって回る右ネジが進む方向)

5. 磁場の定義

静電場の場合には、試験電荷が受ける力を試験電荷で割るだけの操作で電場が求まった。

磁場の場合は、複雑である。（磁石が受ける力で定義していれば簡単だったのだが！）

磁場の方向の決定：

磁場で荷電粒子を走らせたとき、軌道が螺旋にならず円となるように速度の向きを変える：磁場の向きは軌道面と直交する。

磁場の大きさの決定：

荷電粒子が円軌道を描くとき、その速度と円の半径から加速度を測定する。荷電粒子の質量が既知ならば、向心力 F が分かる。

磁場 $B = |\vec{B}|$ は

$$B = \frac{F}{qv}$$

となる。

磁場の単位：

1 T(テスラ): $q = 1\text{ C}$ の電荷が $v = 1\text{ m/s}$ で磁場と直交して運動するとき、 $F = 1\text{ N}$ の力を与える磁場

注意：1 T の磁場は非常に強力である。東京付近の地磁気の水平成分は $3 \times 10^{-5}\text{ T}$ 程度である。

人体の画像診断に用いる MRI では 1T を少し越える程度の磁場を用いる。

以上は磁場の定義となっている測定方法を解説したが、

通常は（磁場の測定に限らず）既に分かっている磁場と大きさ比較する方法がとられる。

たとえば、ある物質が磁場の中で示す性質が磁場の大きさに比例するとき、その性質を観測すればよい。

- ・ ホール効果（教科書参照「）は、磁場中で半導体に電流を流すとき両側面に電荷が現れる。
- ・ ポッケルス効果は、磁場中で物質の屈折率が変化する。
- ・ 電磁誘導（後に学ぶ）は、磁場中でコイルを回転すると誘導起電力が生じる（発電機）。

などなど。

6. 一様な磁場中の荷電粒子の運動

荷電粒子の速度が磁場と直交するとき、受ける力は速度と直交する： $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

この力は、速度の方向を変えるが、速度の大きさを変えない。

・ 速度の大きさが一定で、時間的に一定の割合で向きを変える運動は、**等速円運動（等角速度円運動）**である。
図のように

- ・ 荷電粒子の電荷を正： $q > 0$
- ・ 磁場の向きを、紙面と垂直に、面から裏に向かう： \otimes

とし、ある時刻において

- ・ 荷電粒子が紙面の $上側$ にいて、 $左向き$ の速度 \vec{v} をもつ。

とき

- ・ 力の向きは $下向き$ 、すなわち速度ベクトルは反時計回りに回転する。
- ・ 位置ベクトルは円を反時計回りに回転する
- ・ このような磁場中の円運動を**サイクロトロン運動**ということもある。

軌道円の半径を r とすると、

- ・ 加速度： $\frac{v^2}{r}$ → 円運動の向心力： $F = m \frac{v^2}{r}$

磁場による力が向心力をつくる

- ・ $F = qvB = m \frac{v^2}{r}$

円運動の角速度を ω とする

- ・ $v = r\omega$
- ・ $r = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB} = \frac{mr\omega}{qB} \rightarrow \omega = \frac{q}{m}B$ (サイクロトロン振動数)

磁場が一定のとき

- ・ 円運動の角速度は、粒子の**電荷と質量の比 $\frac{q}{m}$** だけで決まる。
 - ・ 角速度を測定すると $\frac{q}{m}$ が求まる。（質量分析）

7. サイクロトロン

サイクロトロン運動を用いた加速器の原理を説明する。

もとは、サイクロトロンという名前をつけた加速器があって、その装置の中で起きる運動をサイクロトロン運動と呼んだ。

【構造】

- ・ 一様な磁場をつくる磁極の間に、真空容器（図には描いてない）がある。
- ・ 真空容器の中に、その形状から“D（ディー）”と呼ばれる2個の加速電極がある。
 - ・ ・ 電極を上から見ると D すなわち半円。
 - ・ ・ 電極は中空の導体で、モナカを半分に切って中の「あんこ」を捨て去ったような形。
 - ・ ・ 電極には交流電圧を加える。
 - ・ ・ 交流の角振動数は（磁場 B と注入する粒子の q, m で決まる）サイクロトロン振動数とする。

【動作】

- ・ 2個の電極を合わせた円の中心から荷電粒子を注入する。
- ・ 2個の電極の間の電場によって粒子は加速される。
- ・ ひとつの電極内部には電場が無いので、サイクロトロン運動をする。
- ・ 片方の電極の内部を通り、円を半周した粒子が電極間に来ると、交流電場の向きが反転しているので、さらに加速される。
- ・ 粒子の速度の増加により軌道円の半径が大きくなり、装置から飛び出したところで加速が終わる。

【利用】

- ・ 交流の角振動数を一定のまま加速するので、簡便な装置だが、速度の増加にともない相対論的な効果が顕著になると、それ以上加速できない。
 - ・ ・ 粒子の運動エネルギーは $10^7 \sim 10^9$ eV
 - ・ 治療用の粒子ビームの発生、放射性同位元素の生成など
- 参考資料：東北大学 サイクロトロン・ラジオアイソトープセンター（の最後のスライド）

8. 磁力線に巻きつく

磁場中の荷電粒子は**磁力線に巻き付く**ような運動をする。

とくに、磁場の空間的・時間的な変化がゆるやかなとき、荷電粒子の軌道が包み込む磁力線の本数が一定となる。

9. ローレンツ力

電場と磁場の両方があるとき、荷電粒子はクーロン力と磁場からの力のベクトル和を合力として受ける。

この力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

をローレンツ力と呼ぶ。

荷電粒子が電場と磁場から受ける力はこれしかない。

力の名前

磁場がなく、電場だけのとき、この力はクーロン力というが、
電場がなく、磁場だけのときに、ローレンツ力ということがある。

電流が流れる導線を磁場中に置くと力を受ける。

これがモーターの原理となる。

ここでは、導線が受ける力を

- ・ 導線の中で荷電粒子が運動して電流となる
- ・ 磁場中で運動する荷電粒子が受ける力が導線本体に伝わり、導線が力を受けるという視点から求める。

電流 I が磁場 B と直交する場合

- 面積 S の導線を流れる電流 I が

- ・ 荷電粒子の電荷 q
- ・ 導体中の数密度 n
- ・ 平均の速さ v

によるとすると

- ・ 電流密度 $j = qnv$
- ・ 電流 $I = jS = qnvS$

- 導線の長さ L の部分が受ける力 F は

- ・ この部分に含まれる荷電粒子の数 $N = nLS$
- ・ 荷電粒子 1 個の受ける力 $f = qvB$
- ・ 求める力 $F = fN = qvBnLS = qmvSBL = IBL$

- 電流 $I = 1\text{ A}$, 長さ $L = 1\text{ m}$, 磁場 $B = 1\text{ T}$ → 導線のこの部分に加わる力 $F = 1\text{ N}$

11. ループ電流が受ける力

ループ電流が磁場中で受ける力

【状況(図)】

- ・ 一様な磁場 B
- ・ ループは長方形 $a \times b$
- ・ 2 辺は磁場と直交
- ・ ループ面の法線と磁場がなす角 θ
- ・ 電流 I

【観察】

- ・ 長さ a の 2 辺に加わる力：
 - ・ $\theta \neq 0$ のとき，2 つ力の方向と，作用点を結ぶ線の向きが異なるので，偶力（大きさが同じで反対向き）となり，
 - ・ トルク（回転を引き起こす力の能力）を発生する。
 - ・ それ以外に，ループを広げようとする効果をもつ
- ・ 長さ b の 2 辺に加わる力：
 - ・ 2 つ力の方向と，作用点を結ぶ線の向きが，常に同じなのでループを両側に広げようとする効果だけをもつ

【トルクの計算】

- ・ 長さ a の 2 辺に加わる力 $F = IBa$
- ・ トルク $N = bF \sin \theta = b(IBa) \sin \theta = IBab \sin \theta = IBS \sin \theta$

【トルクの外積を用いた表現】

- ・ ループの面を表すベクトル： \vec{S}
- ・ トルク： $\vec{N} = I\vec{S} \times \vec{B}$ ，ベクトル \vec{N} の向きに右手親指を立てると，他の指が巻く方向に回転を起こそうとする

12 ループ電流と磁気双極子

ループ電流が磁気双極子と同等であることを示す.

【磁気双極子】

- ・ 電気双極子の磁気バージョン.
- ・ 正負の点磁荷 $\pm q_m$ が距離 $d = 2a$ 離れる : **磁気モーメント** $m = q_m d$
 - ・ ・ 電気双極子モーメント vs 磁気モーメント
- ・ 点磁荷 q_m が磁場 \vec{B} から受ける力 $\vec{F} = q_m \vec{B}$
- ・ 均一な磁場 B の中で**磁気双極子が受けるトルク** : $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$

【ループ電流が磁気モーメントである】

- ループ電流が受けるトルク
 - ・ ループ電流の $I\vec{S}$ を磁気モーメント \vec{m} と読み替える
すなわち

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

とすると+

$$\vec{N} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

- ・ ループ電流は、磁場中で、磁気モーメントと同じトルクを受ける.
- ループ電流が周囲につくる磁場
 - ・ 磁気モーメントがつくる磁場と同じ
- 磁石の起源もすべてループ電流とすれば、正負の磁荷を分離して蓄えられないことが理解できる.
 - ・ 原子や分子の内部にループ電流がある！

† コイルの導線が n 巻きならば、磁気モーメントは $\vec{m} = nI\vec{S}$

コイルの形状が長方形でなく、平面でもないとき、同じ電流が流れるたくさんの微小な長方形のコイルの集まりと考える.

- ・ ・ となりあう微小コイルの互いに接する導線には同じ大きさで逆向きの電流が流れるので相殺して 0
- ・ ・ 微小コイルの集まりと考えても、残る電流は外周だけなので、もとのコイルとまったく同じ
- ・ ・ もとのコイルが受けるトルクは、微小な磁気モーメントが受けるトルクのベクトル和となる.

13 磁気モーメントの単位

面積 S のコイルに電流 I が流れたときに生じる磁気モーメントが

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

だから、**磁気モーメントの単位は A m^2 となる。**

また、磁気モーメントが磁場から受けるトルクが

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

だから、**磁気モーメントの単位は Nm/T とも書ける。** これを J/T と書くこともある。