3.　複素表示

基本事項

- 虚数単位: $\sqrt{-1}=i \quad (i^2=-1)$,　　複素数: $z=x+iy \quad \longleftrightarrow$ 　　複素平面，ベクトル(x,y)
  - 実部：$\mathrm{Re}[z]=x$, 虚部：$\mathrm{Im}[z]=y$
- ゼロ：$0=0+0\times i$,　　負：$-z=(-x)+i(-y)=-x-iy$,　　実数倍： $\lambda z=\lambda x+i\lambda y$
- 和・差：$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$,　　積：$z_1 z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_2)$
- 複素共役(共役複素数)：$\bar{z}=z^*=x-iy$
  - 商：$z_1/z_2=z_1\bar{z}_2/|z_2|^2$,　絶対値：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$ ，$\mathrm{Re}[z]=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$,　$\mathrm{Im}[z]=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$
- 指数関数： $e^z=\exp z=1+z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots=1+(x+iy)+\frac{1}{2}(x+iy)^2+\cdots$,
  - $e^0=1$,　$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$
  - オイラーの公式： $e^{i\theta}=\left(\theta-\frac{1}{3!}\theta+\frac{1}{5!}\theta^5-\cdots\right)+i\left(1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4+\cdots\right)=\cos\theta+i\sin\theta$
  - $e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-i\theta)=\cos\theta-i\sin\theta=\overline{e^{i\theta}}=e^{\overline{i\theta}}$ ，$\left|e^{i\theta}\right|=1$（単位円），$e^{i\omega t}$(反時計まわり回転)
  - 極形式：$z=(r\cos\theta+i\sin\theta)=r\ e^{i\theta}$，$|z|=r$，$\arg(z)=\theta$（偏角），　$z_1z_2=r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
  - $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$,　$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$
- 微分：$\frac{d}{dt}e^{i\omega t}=i\omega\ e^{i\omega t}$　　積分（微分すると被積分関数になるもの）：$\int e^{i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}$

定義に関わる確認

Q1. 次の複素数が表す複素平面上の点を図示せよ．

① 0　② 1　③ -1　④ i　⑤ $-i$　⑥ $\frac{1}{i}$　⑦ $1+i$　⑧ $e^{\frac{\pi}{2}i}$　⑨ $e^{\pi i}$　⑩ $e^{-\pi i}$　⑪ $e^{-\frac{\pi}{2}i}$　⑫ $2e^{\frac{3}{2}\pi i}$

A1. 図を描くのを省略するかわりに，実軸を x 軸，虚軸を y 軸と重ね，複素平面上の点を(x,y)で表す．
①(0,0),②(1,0),③(−1, 0),④(0, 1),⑤(0, −1),⑥(0, −1),⑦(1, 1),⑧(0, 1),⑨(−1, 0),⑩(−1, 0),⑪(0, −1),⑫(0, 2)

Q2. 三角関数の加法定理: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$,　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$を，$e^{i(\alpha+\beta)}$を用いて確認せよ．

A2. $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)$
最左辺の実部（虚部）と最右辺の実部（虚部）がそれぞれ等しいことから確認できる．

Q3. $e^{i\alpha}$と$z=re^{i\theta}$の積は，　$e^{i\alpha}z=re^{i(\theta+\alpha)}$と表すと，$z$を角 α だけ回転する操作になることが分かる．次の積は z をどのように回転する操作か．① iz　② $\frac{z}{i}$　③ $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$　④ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z$

A3. ① π/2 ② −π/2 ③ π/3 ④ −π/4

Q4. $\frac{d}{dt}e^{i\omega t}=i\omega\ e^{i\omega t}$の関係をサインとコサインを用いて確認せよ．

A4 . $\frac{d}{dt}e^{i\omega t}=\frac{d}{dt}(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))=-\omega\sin\omega t+i\omega\cos\omega t$

$$i\omega\ e^{i\omega t}=i\omega(\cos\omega t+i\sin\omega t)=i^2\omega\sin\omega t+i\omega\cos\omega t=\ -\omega\sin\omega t+i\omega\cos\omega t$$

Q5. $\int e^{i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}$の関係をサインとコサインを用いて確認せよ．

A5. $\int e^{i\omega t}dt=\int(\cos\omega t+i\sin\omega t)dt=\int\cos\omega t\,dt+i\int\sin\omega t\,dt=\frac{1}{\omega}\sin\omega t-\frac{i}{\omega}\cos\omega t=\frac{1}{\omega}(\sin\omega t-i\cos\omega t)$

$$\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}=\frac{1}{i\omega}(\cos\omega t+i\sin\omega t)=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{i}\cos\omega t+\sin\omega t\right)=\frac{1}{\omega}(-i\cos\omega t+\sin\omega t)$$

Q6. $\frac{d^2}{dt^2}e^{i\omega t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}e^{i\omega t}\right) = (i\omega)^2\ \ e^{i\omega t} = -\omega^2\ \ e^{i\omega t}$の関係をサインとコサインを用いて確認せよ．

A6. $\frac{d^2}{dt^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t) = \ \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right) = \frac{d}{dt}(-\omega\sin\omega t + i\omega\cos\omega\, t) = -\omega^2(\cos\omega t + i\sin\omega t)$

実力・応用問題

ここで「複素電流」

$$\tilde{I} = I_0\cos(\omega t+\phi) + iI_0\sin(\omega t+\phi) = I_0\mathrm{e}^{i(\omega t+\phi)} = \boxed{\widetilde{I_0}e^{i\omega t},\qquad \widetilde{I_0} = I_0e^{i\phi}}$$

と「複素電圧」

$$\tilde{V} = V_0\cos(\omega t+\psi) + iV_0\sin(\omega t+\psi) = V_0\mathrm{e}^{i(\omega t+\psi)} = \boxed{\widetilde{V_0}e^{i\omega t},\ \widetilde{V_0} = V_0e^{i\psi}}$$

を定義する．（$\widetilde{I_0}$を複素電流，$\widetilde{V_0}$を複素電圧と呼ぶこともある．）これらの実部をとると

$$\boxed{I(t) = \mathrm{Re}[\tilde{I}] = I_0\cos(\omega t+\phi),\qquad\qquad V(t) = \mathrm{Re}[\tilde{V}] = V_0\cos(\omega t+\psi)}$$

という角周波数$\omega = 2\pi f$の交流電流と交流電圧が表される．ϕやψは電流と電圧の位相を自由に設定できるようにする初期位相である．たとえば，電流が$I_0\sin\omega t$のとき電圧が$V_0\cos\omega t$となるような状況では$\phi = -\frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$とすればよい．

Q7. 抵抗に関するオームの法則，電気容量（コンデンサー）に関する電流・電圧の式，インダクタンス（コイル）に関する電流・電圧の式を，それぞれ複素電流と複素電圧の式として表せ．

A7. 抵抗　：$V(t) = RI(t) \to \mathrm{Re}[\tilde{V}] = R\ \ \mathrm{Re}[\tilde{I}] \to \mathrm{Re}[\tilde{V}] = \mathrm{Re}[R\tilde{I}] \to \boxed{\tilde{V} = R\ \ \tilde{I}}$

コンデンサー：$C\frac{dV(t)}{dt} = I(t) \to C\frac{d\mathrm{Re}[\tilde{V}]}{dt} = \mathrm{Re}[\tilde{I}] \to \mathrm{Re}\left[C\frac{d\tilde{V}}{dt}\right] = \mathrm{Re}[\tilde{I}] \to \boxed{C\frac{d\tilde{V}}{dt} = \ \ \tilde{I}} \to \boxed{i\omega C\tilde{V} = \ \ \tilde{I}} \to \boxed{\tilde{V} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}}$

コイル　：$V(t) = L\frac{dI(t)}{dt} \to \mathrm{Re}[\tilde{V}] = L\frac{d\mathrm{Re}[\tilde{I}]}{dt} \to \mathrm{Re}[\tilde{V}] = \mathrm{Re}\left[L\frac{d\tilde{I}}{dt}\right] \to \boxed{\tilde{V} = L\frac{d\tilde{I}}{dt}} \to \boxed{\tilde{V} = i\omega L\tilde{I}}$

サインとコサインの関係(より一般的な言い方をすると位相の関係)を含めて，複素電流と電圧の関係が正しく与えられていることに注意せよ．複素電流と複素電圧の関係が先に与えられ，その実部を表示すると実際の物理量である電流と電圧の関係となる，と考えると将来学ぶ交流回路の計算が楽にできる．

Q8. Q7 で求めた関係を，それぞれ$\tilde{V}$と $\tilde{I}$を複素平面上のベクトルによって示せ（ベクトルは回転運動しているので，ある一瞬の様子，たとえば電流ベクトルが実数軸方向を向く瞬間をとらえて示せばよい）．

A8. 教科書 § 13.2 を参照せよ．$i\times$は$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}\times$と同じなので，$\tilde{I} = i\omega C\tilde{V}$は$\tilde{V}$を表すベクトルの長さを$\omega C$倍して反時計回りに９０度回転したものとなる．同じことだが，$\tilde{V} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}$は$\tilde{I}$を表すベクトルの長さを$1/(\omega C)$倍して時計回りに９０度回転したものとなる．L についても同様．図省略．

Q9. 2 個の素子が直列に接続され，それぞれの素子の両端の電圧が$V_{10}\cos(\omega t+\psi_1)$および$V_{20}\cos(\omega t+\psi_2)$のとき，全電圧は対応する複素電圧$\widetilde{V_1}$および$\widetilde{V_2}$を用いて$\mathrm{Re}[\widetilde{V_1}+\widetilde{V_2}]$となることを確認せよ．2 個の素子が並列に接続されているとき全体に流れる電流は複素電流を用いて$\mathrm{Re}[\widetilde{I_1}+\widetilde{I_2}]$となることを確認せよ．

A9. $\mathrm{Re}[\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2] = \mathrm{Re}[\tilde{V}_1] + \mathrm{Re}[\tilde{V}_2] = \mathrm{Re}\left[V_{10}e^{i\psi_1}e^{i\omega t}\right] + \mathrm{Re}\left[V_{20}e^{i\psi_2}e^{i\omega t}\right] = \ \mathrm{Re}\left[V_{10}e^{i(\omega t+\psi_1)}\right] + \mathrm{Re}\left[V_{20}e^{i(\omega t+\psi_2)}\right] = V_{10}\cos(\omega t+\psi_1) + V_{20}\cos(\omega t+\psi_2)$.

電流も同様.

Q10. 電力$P(t) = I(t)V(t)$の一周期にわたる平均値<P> を$\widetilde{I_0}$と$\widetilde{V_0}$ によって表せ．

A10. $P(t) = I(t)V(t) = I_0V_0\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t+\psi) = I_0V_0\{(\cos\phi\cos\psi)\cos^2\omega t + (\sin\phi\sin\psi)\sin^2\omega t +$ 平均をとると消える項$\}$

$$< P > \ = \frac{1}{2}I_0V_0\{(\cos\phi\cos\psi) + (\sin\phi\sin\psi)\} = \frac{1}{2}I_0V_0\cos(\phi-\psi) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\widetilde{\mathrm{I}_0}\ \ \overline{\widetilde{\mathrm{V}_0}}]$$