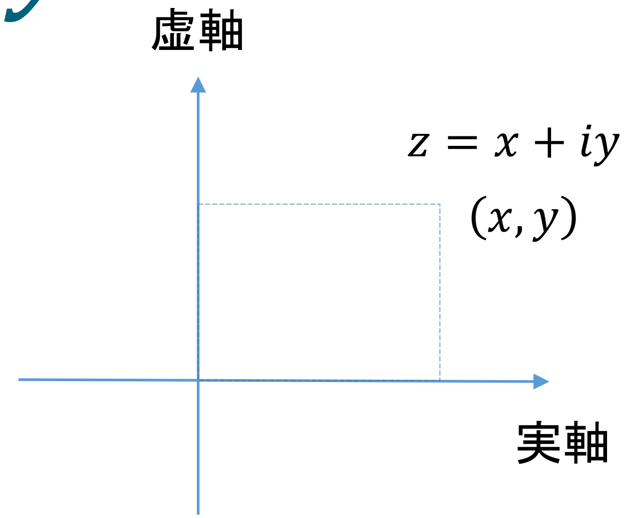
複素指数関数 $e^{i\omega t}$

虚数単位：$i = \sqrt{-1}$

次の値を記せ

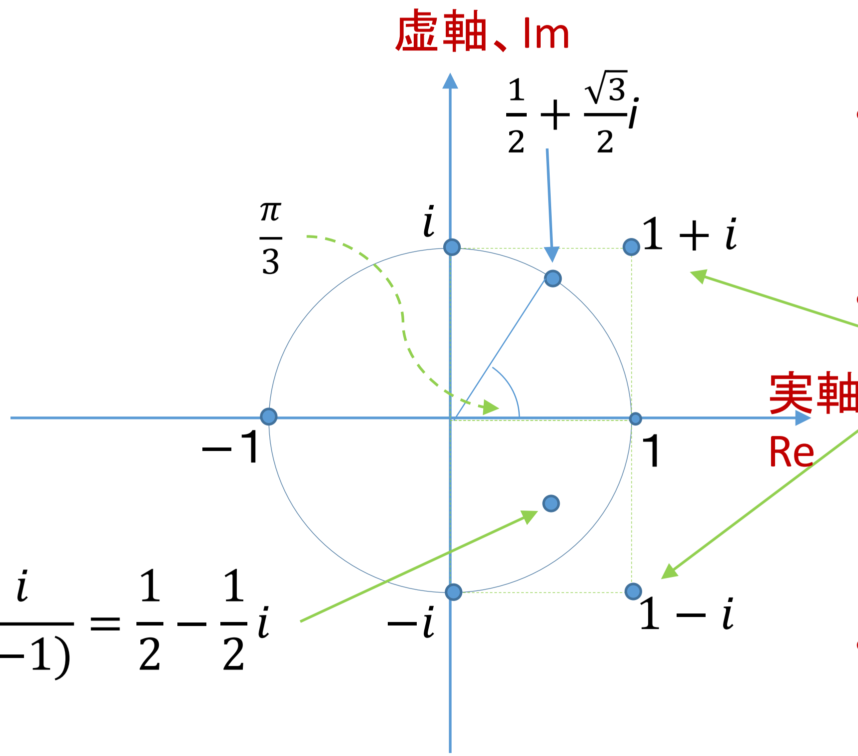
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -1 \times i = -i$
- $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$
- $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1$

複素数: $z = x + iy$



- 複素平面（実軸、虚軸）
  - 点$(x, y) \Leftrightarrow z = x + iy$
- 複素平面上に点の位置を記入せよ
  - $0 = 0 + 0 \times i$
  - $1 = 1 + 0 \times i$
  - $i = 0 + 1 \times i$
  - $-i = 0 + (-1) \times i$
  - $1 + i$
  - $1 - i$
  - $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$
  - $\frac{1}{1+i}$
  - $\frac{1}{1-i}$

複素平面上の位置



$$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{1-(-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

- 絶対値

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

- 複素共役

$$\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy$$

z^*と書くことも多い

$$|z|^2=z\times\bar{z}$$

- 単位円

$$|z|=1$$

複素数の四則計算

- **実数倍：** $c \times z = c \times (x + iy) = cx + i\,cy$
- **和、差：** $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$
  $= (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$

------------以上は、2次元ベクトル (x, y)と同じ--------------

- **掛け算：** $z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + i\,y_2)$
  $= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- **割り算：** $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$
- 興味深い見方： $z_1 \times \overline{z_2} = (z_1$と$z_2$の内積$) + i($外積$)$

$e^{i\theta}$

- 指数関数のマクローリン展開（定義）

$$e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2!}z^{2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{n} + \cdots$$

$z = i\theta$を代入して次の展開と比較せよ。

- サインおよびコサインのマクローリン展開

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^{3} + \frac{1}{5!}\theta^{5} + \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^{2} + \frac{1}{4}\theta^{4} - \cdots$$

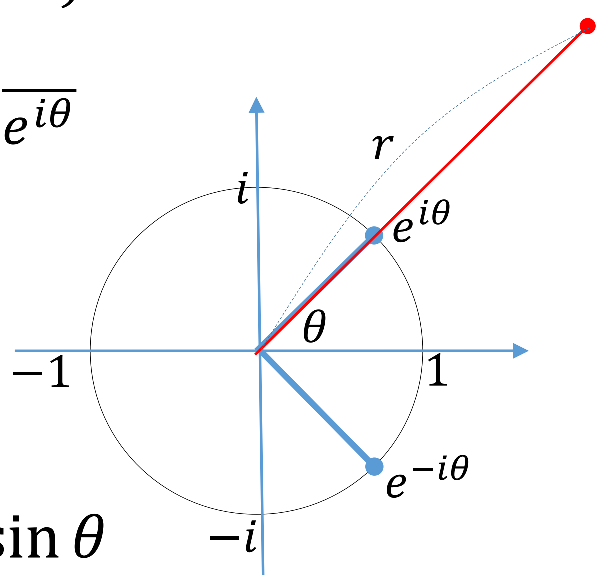
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$: 単位円周上

θ: 実軸から反時計回りに測った角

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$= \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}$



どんな複素数も

と表せる

$r\,e^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

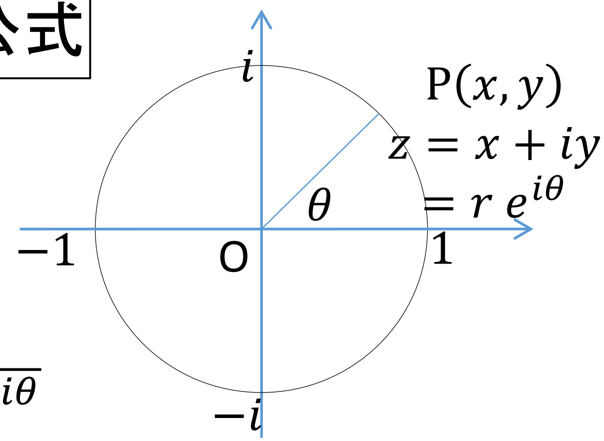
(コ)サイン関数と複素指数関数

基本的な性質

$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{:オイラーの公式}}$

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$:指数の規則

$e^0 = e^{2\pi i} = 1,\quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i,$
$e^{\frac{3}{2}\pi i} = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i,\quad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$



(1) $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}$

(2) $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\right],\quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \mathrm{Im}[\mathrm{e}^{i\theta}]$

(3) $e^{i(\theta+2\pi)} = \mathrm{e}^{i\theta}e^{2\pi i} = e^{i\theta}$

(4) $e^{i(\theta\pm\pi)} = e^{i\theta}e^{\pm\pi i} = -e^{i\theta}$

(5) $e^{i(\pi-\theta)} = e^{i\pi}e^{-i\theta} = -e^{-i\theta} = -\cos\theta + i\sin\theta$

(6) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i\theta}e^{\frac{\pi}{2}i} = i\, e^{i\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$

(7) $e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} = e^{i\theta}e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i\, e^{i\theta} = \sin\theta - i\cos\theta$

(8) $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = 1,\quad \left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 = e^{i\theta}\cdot\left(e^{i\theta}\right)^* = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = 1$

(9) $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

問　左の関係式(3)～(9)を，サイン･コサインの式に書き直せ.

(コ) サイン関数と複素指数関数
時間的な変化

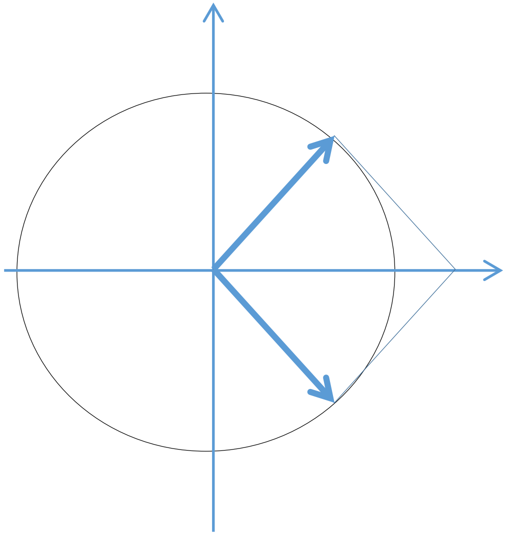
点Pが単位円上を一定の速さで回転するとき

$$\theta = \omega t,\ z(t) = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

$\omega > 0 \rightarrow$ 反時計回り，$\omega < 0$ 時計回り

$e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2\cos\omega t$: 実軸上の単振動

$e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} = 2i\sin\omega t$: 虚軸上の単振動



問： 以下の式をサインとコサインの関係として書き直せ.

時間微分：

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega\, e^{i\omega t}$$

時間積分：

$$\int \mathrm{e}^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t} + C$$

$e^{i\omega t}$の微分

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{i\omega\cdot(t+\Delta t)} - e^{i\omega t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{i\omega t}(e^{i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t}$$

$$= e^{i\omega t} \times \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(e^{i\omega\Delta t} - 1)}{\Delta t} = e^{i\omega t} \times (i\omega)$$

$$\because\ e^{z} \equiv 1 + z + \frac{1}{2}z^{2} + \cdots \quad \rightarrow \quad \mathrm{e}^{i\omega\Delta t} \simeq 1 + i\omega\Delta t$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega\, e^{i\omega t}}$$

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\sin\ \omega t\,, \qquad \frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t$$

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega(\cos\omega t\ + i\sin\omega t) = -\omega\sin\omega t + i\omega\cos\omega t$$

$e^{i\omega t}$の積分

時間積分：不定積分 $\int f(t)dt = F(t)$は「$F(t)$をtで微分すると$f(t)$になる」ことを示す記号.

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t} + C}$$

確認:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}\right) = e^{i\omega t}$$

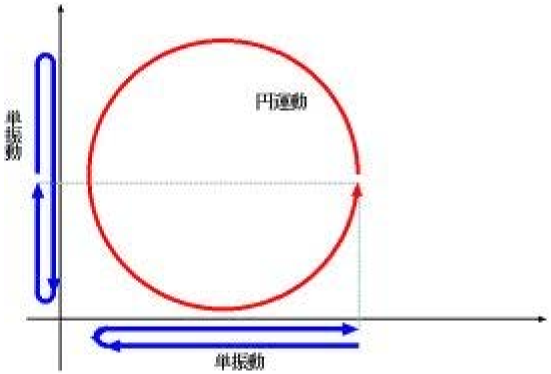
$$\int (\cos\omega t + i\sin\omega t)dt = \frac{1}{\omega}\sin\omega t - \frac{i}{\omega}\cos\omega t + C$$

$$= \frac{i}{i\omega}\sin\omega t - \frac{-1}{i\omega}\cos\omega t + C = \frac{1}{i\omega}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C$$

単振動を表わす式
equations of simple harmonic motion

- 等速円運動する物体の位置
- 単振動 $\left(A\cos\left(\omega t+\theta\right), A\sin\left(\omega t+\theta\right)\right)$
  - 初期位相 θ，initial phase

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\omega t+\theta)}\right]$$
$$= \mathrm{Re}\left[\tilde{A}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right], \qquad \tilde{A} = A\,e^{i\theta}$$



- 複素電流$\tilde{I}(t)$と複素振幅$\tilde{I}_0$，(電圧も同様)

$$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i\phi} e^{i\omega t} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}, \tilde{I}_0 = I_0 e^{i\phi}$$

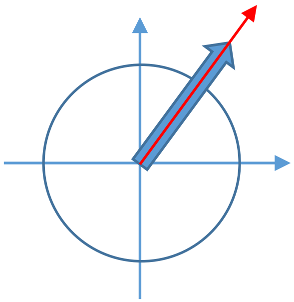
$$I(t) = I_0\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}[\tilde{I}(\mathrm{t})]$$

交流素子の特性

- 抵抗:

$\boxed{\widetilde{V_0} = R\,\widetilde{I_0}}$

$\tilde{V} = R\tilde{I}$ → 実部をとると $V(t) = RI(t)$



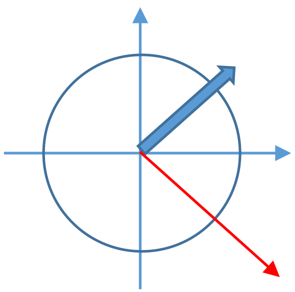
- コンデンサー:

$$\boxed{\widetilde{V_0} = \frac{1}{i\omega C}\,\widetilde{I_0}}$$

$$C\frac{d\tilde{V}}{dt} = i\omega C\tilde{V} = \tilde{I} \rightarrow \text{実部をとると}\ C\frac{dV}{dt} = I(t)$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} = \frac{1}{\omega C}e^{-\frac{\pi}{2}i}\tilde{I}$$

電圧が電流から90度遅れる



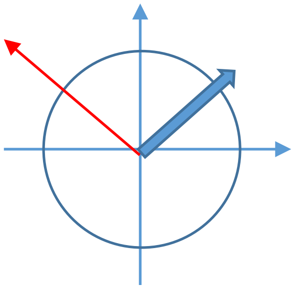
- コイル:

$\boxed{\widetilde{V_0} = i\omega L\,\widetilde{I_0}}$

$$\tilde{V} = L\frac{d\tilde{I}}{dt} \rightarrow \text{実部をとると}\ V = L\frac{dI}{dt}$$

$$\tilde{V} = i\omega L\,\tilde{I} = \omega L\,e^{+\frac{\pi}{2}i}\tilde{I}$$

電圧が電流より90度進む



複素表示による電力

- $P(t) = I(t)V(t)$
$$= I_0 V_0 \cos(\omega t + \phi)\cos(\omega t + \psi)$$
$$= \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos(2\omega t + \phi + \psi) + \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos(\phi - \psi)$$
- $< P > = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos(\phi - \psi)$

以上の内容を，電流電圧の複素表示を用いて表すと

- $\tilde{I} = I_0 e^{i\phi} e^{i\omega t}, \quad \tilde{V} = V_0 e^{i\psi} e^{i\omega t}, \quad \bar{\tilde{V}} = V_0 e^{-i\psi} e^{-i\omega t}$
- $< P > = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\tilde{I}\bar{\tilde{V}}\right] = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\bar{\tilde{I}}\tilde{V}\right]$