微分方程式による回路（システム）の記述

基本事項

- サイン波でない電圧・電流波形の関係も表したい（パルス波形，デジタル信号，スイッチのオン・オフ）
- コンデンサー：$Q = CV,\ I = C\frac{dV}{dt}$，コイル: $V = L\frac{dI}{dt}$，抵抗：$V = RI$　をそのまま用いる．
  - 例：RC 直列回路：$\frac{1}{C}\underbrace{\int I\,dt}_{Q} + RI = V \quad\rightarrow\quad \frac{1}{C}I + R\frac{dI}{dt} = \frac{dV}{dt} \quad\rightarrow\quad \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt}$
- 1(n)階微分方程式の解は 1(n)個の任意定数をもつ．1(n)個の初期条件により解が確定する．

確認のための問題

Q1. RC 直列回路における電流と電压の関係式 $\left(\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt}\right)$ に$\tilde{V} = \widetilde{V_0}e^{i\omega t}, \tilde{I} = \widetilde{I_0}e^{i\omega t}$を代入し，この回路の複素インピーダンスを計算せよ．結果を，既出の LCR 回路のインピーダンスで L=0 とおいたものと比較せよ

A1.　$i\omega\widetilde{I_0} + \frac{1}{RC}\widetilde{I_0} = i\omega\frac{1}{R}\widetilde{V_0} \rightarrow \tilde{Z} = \frac{\widetilde{V_0}}{\widetilde{I_0}} = \frac{i\omega + \frac{1}{RC}}{\frac{i\omega}{R}} = R + \frac{1}{i\omega C} = R - \frac{i}{\omega C}$

Q2. ① RL 直列回路の両端に$V(t)$を加えるときの電流が従う微分方程式を書き複素インピーダンスを計算せよ．
②直列 LCR 回路の両端に V(t)を加えるときの電流が従う微分方程式を書き複素インピーダンスを計算せよ．
③ LCR 並列回路に電流$I(t)$を流すときの電圧が従う微分方程式を書き複素インピーダンスを計算せよ．

A2. ①$L\frac{dI}{dt} + RI = V \rightarrow \qquad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{1}{L}V, \qquad i\omega\tilde{I}_0 + \frac{R}{L}\tilde{I}_0 = \frac{1}{L}\tilde{V}_0, \qquad \tilde{Z} = \frac{\widetilde{V_0}}{\widetilde{I_0}} = \frac{i\omega + \frac{R}{L}}{1/L} = R + i\omega L$

②　$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\underbrace{\int I\,dt}_{Q} + RI = V \rightarrow L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt} \quad\rightarrow\quad \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\frac{dV}{dt}$

$$(i\omega)^2\widetilde{I_0} + i\omega\frac{R}{L}\widetilde{I_0} + \frac{1}{LC}\widetilde{I_0} = \frac{1}{L}(i\omega)\widetilde{V_0} \rightarrow \tilde{Z} = \frac{(i\omega)^2 + i\omega\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}{\frac{1}{L}(i\omega)} = i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}$$

③　$C\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L}\int V\,dt + \frac{1}{R}V = I \rightarrow \quad C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L}V = \frac{dI}{dt} \rightarrow \quad \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC}V = \frac{1}{C}\frac{dI}{dt}$

$$\tilde{Z} = \frac{i\omega/C}{(i\omega)^2 + \frac{i\omega}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{i\omega R}{-\omega^2 RC + i\omega + \frac{RC}{LC}} = \frac{R}{1 + \frac{1}{i\omega}RC(\frac{1}{LC} - \omega^2)}$$

Q3. RC 直列回路の両端を一定の電圧（電源V_0あるいは 0）につなぐ場合について　①CをV_0で充電し終わった定常状態が$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt}$の解であることを確認せよ．②充電後の時刻$t = 0$で両端を接続して放電を開始した．$t > 0$において回路を流れる電流が従う方程式と初期条件を記せ．③　抵抗の両端に加わる電圧V_Rに関する微分方程式を書け．

A 3. ①充電を完了したのちの定常状態は回路に電流が流れない：I=0 ($dI/dt = 0$)，コンデンサー両端の電圧がV_0($dV/dt = 0$)，抵抗両端の電圧が 0 だから，$V = V_0$．$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt}$の両辺がともに 0 となり，この解が微分方程式を満たす．②$t > 0$において$\frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = 0$．$t = 0$における電流の初期条件として，抵抗の両端に充電電圧V_0が加わるので電流$I(0) = -V_0/R$が流れる（負号は充電電流と逆向きを意味する）．③ 時刻によらず$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} = 0$，$V_R = RI$だから両辺に$R$を掛けると$\frac{dV_R}{dt} + \frac{1}{RC}V_R = 0$

Q4. RC 直列回路において，$\frac{dI}{dt}+\frac{1}{RC}I=\frac{1}{R}\frac{dV}{dt}$のかわりに，コンデンサーが蓄える電荷 Q に関する微分方程式を書け．

A4. $\frac{1}{C}\underbrace{\int I\,dt}_{Q}+RI=V$において$I=\frac{dQ}{dt}$とすると，$\frac{1}{\mathrm{C}}Q+R\frac{dQ}{dt}=V \rightarrow \frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q=\frac{1}{R}V$

Q5. Q4 で得た微分方程式を，

①V_0で充電したのち $t=0$で回路両端を短絡（ショート）して放電を開始するとき

② 放電を完了したのち$t=0$で回路両端にV_0を加えて充電を開始するとき

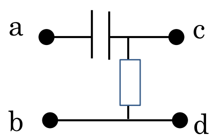
について，$\mathrm{t}>0$における式に書き換え，電荷の初期条件を記せ．

A 5.① $\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q=\frac{1}{R}0$，$Q_0=CV_0$，　② $\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}Q=\frac{1}{R}V_0$，$Q_0=0$

Q6. LCR 直列回路の両端をつないだとき，回路を流れる電流が従う微分方程式を書け．

A6. $\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=0$

Q7.　図の端子 ab 間に電圧波形$V_{\mathrm{in}}(t)$を加えたとき（入力），端子 cd 間の電圧波形を$V_{\mathrm{out}}(t)$とする（出力）．τ =RC（RC 回路の時定数）が非常に大きいときと小さいときにわけて(具体的には，$\frac{dV_{out}}{dt}$と$\frac{\mathrm{V_{out}}}{\tau}$のうち小さいほうを省略する)，$V_{\mathrm{in}}(t)$と $V_{\mathrm{out}}(t)$の関係を調べよ．



A7.CR を直列接続した素子の両端に$V_{\mathrm{in}}(t)$を加えたときの抵抗両端の電圧が

$V_{\mathrm{out}}(t)$である．$\frac{dI}{dt}+\frac{1}{RC}I=\frac{1}{R}\frac{dV_{in}}{dt}, V_{out}=RI \quad \rightarrow \quad \frac{dV_{out}}{dt}+\frac{1}{\tau}V_{out}=\frac{dV_{in}}{dt}$

$\tau=RC$が非常に大きいとき$\frac{dV_{out}}{dt}=\frac{dV_{in}}{dt}$，したがって入出力は定数を除いて同じ．$\tau=RC$が非常に小さいとき

$\frac{1}{\tau}V_{out}=\frac{dV_{in}}{dt}$，したがって入力信号の時間微分に比例した出力信号を得る．

Q8. x軸上を運動する質量mの物体に，フックの法則にしたがう復元力$-kx$，速度に比例する抵抗力 $-c\frac{dx}{dt}$，それ以外に外部から加わる力$F^{(\mathrm{ex})}(t)$が作用するとき，この物体の運動方程式を書け．

A8. $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-c\frac{dx}{dt}+F^{(\mathrm{ex})}(t) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F^{(\mathrm{ex})}(t)}{m}$