【ラプラス変換の定義】

関数$f(t)$と指数関数e^{-st}を掛けてtについて$[0,\infty)$の範囲で積分する：

$$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

積分した結果はsの値により異なる，すなわちsの関数$F(s)$となる．$F(s)$を，$f(t)$のラプラス変換という．記号$\mathcal{L}[f]$はfのラプラス変換を表す.

たとえば，定数cのラプラス変換は

$$\mathcal{L}[c] = c\int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{c}{s}[e^{-st}]_0^\infty = \frac{c}{s}$$

【フーリエ変換との関係】

$s = i\omega$とすると，ラプラス変換は$f(\mathrm{t})\theta(t)$のフーリエ変換と一致する（$\theta(t)$は単位階段関数=ユニット・ステップ関数）．フーリエ変換は$\left|f(t)e^{-i\omega t}\right| = |f(\mathrm{t})|$だが，ラプラス変換は$|f(t)e^{-st}| = |f(\mathrm{t})||e^{-st}|$であり，$s$の実部が正のとき広義積分（$t \to \infty$の極限）がフーリエ変換よりも容易に収束する.

【導関数のラプラス変換】

$\frac{df}{dt}$のラプラス変換を部分積分により実行する：

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}e^{-st}dt = \left[\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} - f(0)\right] + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= sF(s) - f(0), \qquad \text{ただし}f(t)\text{は}\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0\text{を満たすとした.}$$

$\frac{d^2f}{dt^2}$のラプラス変換を部分積分により実行する：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = \int_0^\infty \frac{d^2f}{dt^2}e^{-st}dt = s\,\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] - f'(0) = s\{sF(s) - f(0)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

ただし，さらに$\lim_{t\to\infty} f'(t)e^{-st} = 0$とした.

【ラプラス変換の線型性】

積分が線型演算だから

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g] = aF(s) + bG[s]$$

【線型微分方程式を代数方程式に変換する】

導関数のラプラス変換が，ラプラス変換×sのようになるため，線型微分方程式（の各項）をラプラス変換すると，微分方程式がsの代数方程式になる．しかも，初期条件$f(0), f'(0)$などが自動的に織り込まれる.

たとえば,

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = c, \quad f'(0)\text{と}f(0)\text{は与えられている}$$

のとき，両辺のラプラス変換は

$$\mathcal{L}[f'' + af' + bf] = \mathcal{L}[f''] + a\mathcal{L}[f'] + b\mathcal{L}[f] = \{s^2F(s) - sf'(0) - f(0)\} + a\{sF(s) - f(0)\} + bF(s) = \mathcal{L}[c] = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{s}}$$

したがって

$$(s^2+as+b)F(s)=sf'(0)+(a+1)f(0)+\frac{c}{s}\to F(s)=\frac{sf'(0)+(a+1)f(0)+\frac{c}{s}}{s^2+as+b}$$

右辺の分子で$f'(0)$と$f(0)$の値が与えられているから，右辺はsの有理式である．
ラプラス変換をすると右辺の有理式になる関数が，微分方程式の解である．

$$\mathcal{L}[u_s(t)]=\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$$
$$\mathcal{L}[t]=\frac{1}{s^2}$$
$$\mathcal{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$$
$$\mathcal{L}[e^{-at}]=\frac{1}{s+a}$$
$$\mathcal{L}[te^{-at}]=\frac{1}{(s+a)^2}$$
$$\mathcal{L}[t^ne^{-at}]=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$
$$\mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$
$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ （$\delta(t)$ はデルタ関数）

【逆ラプラス変換(ラプラス逆変換ともいう)】

$$f(t)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-ip}^{c+ip}F(s)e^{ist}\,ds,$$

ただし$c>M, |f(t)e^{-Mt}|\le 1$ を満たすMがあるとする．

この複素積分を実行してもよいが，通常は，さまざまな関数のラプラス変換を計算して置いて，その表を逆にたどる．

【代表的なラプラス変換】

http://ja.wikipedia.org/wiki/ラプラス変換

http://okawa-denshi.jp/techdoc/2-1-4Rapurasuhyou.htm

http://www.ice.tohtech.ac.jp/~nakagawa/laplacetrans/Laplace2_c4.htm

【重要な性質】

線型性はすでに学んだ．その他に

$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$：スケーリング

$\mathcal{L}[f(t-b)]=\mathrm{e}^{-bs}F(s)$：t のシフト

$\mathcal{L}[f(t)e^{at}]=F(s-a)$：s のシフト

$\mathcal{L}\left[\int_0^{\mathrm{t}}f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$：積分則

$\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}\left[\int_0^{\mathrm{t}}f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]=\mathcal{L}[f]\times\mathcal{L}[g]$：たたみこみ積分

$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$：初期値定理

$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$：最終値定理