$f(t)$のラプラス変換は$\boxed{F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt}$で定義される．

Q1.　$y'(t)+2\,y(t)=0$を解け(一般解を求めよ)．ヒント：$y(t)=Ae^{\lambda t}$を微分方程式に代入しλを決定する．

A1. $\lambda\,Ae^{\lambda t}+2\,Ae^{\lambda t}=(\lambda+2)Ae^{\lambda t}=0\ \rightarrow\ \lambda=-2.$ $y(t)=Ae^{-2t}$（初期条件により A が決まり特解となる).

Q2. $y'(t)+2\,y(t)=4,\ y(0)=5$を解け（特解を求めよ）. ヒント：Q1 の解（斉次解）の係数Aを t の関数と考え，微分方程式に代入し，A が満たすべき式を求める．

A2. $(-2Ae^{-2t}+A'e^{-2t})+2Ae^{-2t}=A'e^{-2t}=4\ \ \rightarrow \frac{dA}{dt}=4e^{2t}\rightarrow A=2e^{2t}+C,$

$y(t)=(2e^{2t}+C)e^{-2t}=2+Ce^{-2t},\ y(0)=5\ \ \rightarrow y(t)=2+3e^{-2t}$

Q3. $y(t)$のラプラス変換$Y(s)$を用いると，$y'(t)$のラプラス変換が$sY(s)-y(0)$となることが知られている．また定数 1 のラプラス変換は$\frac{1}{s}$となるという．さらに，ラプラス変換は線形である．これらの知識をもとに，①Q2 の微分方程式をラプラス変換せよ. ②Y(s)を s の関数として表しできるだけ簡単な分数に分解せよ(部分分数分解).

A3. ① $sY(s)-y(0)+2\,Y(s)=\frac{4}{s}$ ② $Y(s)=\frac{5s+4}{s(s+2)}=\frac{3}{s+2}+\frac{2}{s}$

Q4. $\frac{1}{s}$の逆変換(ラプラス変換すると 1/s になるもの)が 1，$\frac{1}{s+a}$の逆変換がe^{-at}となることを既知として，Q3 で得た Y(s)を逆変化して$y(t)$を求めよ．

A4. $Y(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{2}{s}\ \rightarrow\ \ y(t)=3e^{-2t}+2$

Q5.①定数c, ② $u(t-c)=\begin{cases}1\cdots t\ge c\\0\cdots t<c\end{cases}$ のラプラス変換を計算せよ(関数u(t)は単位階段関数という (c = 0 の場合)),

③ e^{-at}のラプラス変換を計算せよ．

A5. ① $\int_0^\infty c\,e^{-st}dt=c\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\mathrm{c}\left[(-\frac{1}{s})e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{c}{s}$　　　　$\because \lim_{t\to\infty}e^{-st}=0$ ただし $s>0$

② $\int_0^\infty u(t-c)\,e^{-st}dt=\int_c^\infty e^{-st}\,dt=\left[(-\frac{1}{s})e^{-st}\right]_c^\infty=\frac{e^{-sc}}{s}$

③ $\int_0^\infty e^{-at}\,e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt=\frac{1}{s+a}$

Q6. ①ラプラス変換が線形であることを確認せよ．② $f'(t)$と③$f''(t)$のラプラス変換を計算せよ．

A6. ① $\int_0^\infty(\alpha f(t)+\beta g(t))e^{-st}\,dt=\alpha\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt+\beta\int_0^\infty g(t)e^{-st}=\alpha F(s)+\beta G(t)$

② $\int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}dt=[f(t)e^{-st}]_0^\infty+s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt=-f(0)+sF(s)$ ただし $s>0$, おだやかな$f(t)$

③ $\int_0^\infty f''(t)\,e^{-st}dt=\left[f'(t)e^{-st}\right]_0^\infty+s\int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}dt=-f'(0)+s(-f(0)+F(s))=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

Q7.　$\mathcal{L}[f(\mathrm{t})]\equiv\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt=F(s)$と書く．

① $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$, ②　$\mathcal{L}[f(t-b)]=e^{-bs}F(s)$, ③ $\mathcal{L}[f(t)e^{at}]=F(s-a)$,　$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t')dt'\right]=\frac{1}{s}F(s)$を確認せよ．

A7. ① $\int_0^\infty f(at)e^{-st}\,dt=\int_0^\infty f(at)e^{-\frac{s}{a}(at)}\,\frac{d(at)}{a}=\int_0^\infty f(t')e^{-\frac{s}{a}t'}\frac{dt'}{a}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

② $\int_0^\infty f(t-b)e^{-st}\,dt=\int_{(t-b)=-b}^\infty f(t-b)e^{-s(t-b)}e^{-bs}\,d(t-b)=e^{-bs}\int_0^\infty f(t')e^{-st'}\,dt'=e^{-bs}F(s),\ f(t)=0\cdots \mathrm{t}<0$ とする

③ $\int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}\,dt=\ \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\,dt=F(s-a)$

④ $\int_0^\infty\left\{\int_0^t f(t')dt'\right\}e^{-st}\,dt=\left[\left\{\int_0^t f(t')dt'\right\}\times\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty-\int_0^\infty[\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t f(t')dt'\right\}\times\frac{1}{-s}e^{-st}]dt$

$$\left[\left\{\int_0^t f(t')dt'\right\}\times\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_0^\infty=\lim_{t\to\infty}\left\{\int_0^t f(t')dt'\right\}\times\underbrace{\frac{1}{-s}e^{-st}}_{\to 0}-\underbrace{\left\{\int_0^0 f(t')dt'\right\}}_{=0}\times\frac{1}{-s}e^{-0}=0$$

$$\therefore\int_0^\infty\left\{\int_0^t f(t')dt'\right\}e^{-st}\,dt=-\int_0^\infty[\underbrace{\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t f(t')dt'\right\}}_{=f(t)}\times\frac{1}{-s}e^{-st}]\,dt=\ \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$