1. 常微分方程式．階数と次数

- ✓ 微分方程式とは，導関数（あるいは微分）を含む方程式のことである．自然現象や社会現象など現実の問題をとりあつかうとき，微分方程式が不可欠な表現になることが多い．
- ✓ 例：

$$(1)\ x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$(2)\left(3a\frac{dy}{dx}+2\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left(a\frac{dy}{dx}+1\right)\frac{dy}{dx}$$

$$(3)\ \tan\psi\frac{d\rho}{d\theta}=\rho$$

$$(4)\ \frac{d^2y}{dx^2}=12(2x-1)$$

$$(5)\ dy=\frac{b^2x}{a^2y}dx$$

$$(6)\ d\rho=-\frac{a^2\sin 2\theta}{\rho}d\theta$$

$$(7)\ d^2y=\left(20x^3-12x\right)dx^2$$

$$(8)\ x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=5u$$

$$(9)\ x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$(10)\ \frac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)u$$

- ✓ 常微分方程式（ordinary differential equation）は，ただ一つの独立変数を含む．上の例(1)-(7)は常微分方程式である．
- ✓ 偏微分方程式(partial differential equation)は，複数の独立変数を含む．上の例(8)-(10)は偏微分方程式である．
- ✓ この解説では常微分方程式だけを扱う．
- ✓ 微分方程式に現れる導関数（あるいは微分）の最高階数がｎのとき，ｎ階(n-th order)微分方程式という．
- ✓ 上の例(3)(5)(6)(8)の階数は？　[１階]
- ✓ 上の例(1)(2)(4)(7)の階数は？　[２階]
- ✓ 上の例(10)の階数は？　[３階]
- ✓ 微分方程式に現れる最高階の導関数（あるいは微分）の「べき」がｍのとき，ｍ次(m-th degree)微分方程式という．上の例では，(2)は２次，それ以外はす

べて１次である．

2.　微分方程式の解．積分定数．

- ✓　微分方程式の解とは，常にその方程式を満たすような，独立変数と従属変数の関係のことである．
- ✓　たとえば

(A)　$y = c_1 \sin x$

は微分方程式

(B)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

の一つの解である．なぜなら，(A)を２回微分すれば

(C)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -c_1 \sin x$

であり，(A)と(C)を(B)に代入すると

$-c_1 \sin x + c_1 \sin x = 0$

となり，いかなるxについても(A)は(B)を満たすことがわかる．ここでc_1は定数であればどのような数であってもよい（任意定数）．同様にして

(D)　$y = c_2 \cos x$

も(B)の解であることが示される．c_2は任意定数．さらに

(E)　$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

も(B)の解であり，このほうがより一般的である．すなわち，(E)においてc_1をゼロにすれば(D)となりc_2をゼロにすれば(A)となるので，(E)は(A)と(D)を含んでいる．

- ✓　これらの解に現れた任意定数c_1とc_2は積分定数（constants of integration）と呼ばれる．
- ✓　解(E)のように，微分方程式の階数と同じ数の任意定数を含むものを一般解（general solution）という．ただし，その任意定数は解を構成する独立な要素（ここでは$\sin x$と$\cos x$）に対して与えられたものである．
- ✓　一般解の任意定数に特定の数値を与えたとき，特殊解（particular solution）という．
- ✓　ある微分方程式の解が積分の形で書けたとき（その積分が実行できるかどうかによらず），微分方程式が解とけたと言う．

3.　微分方程式の解の検証

微分方程式の解を求める作業をはじめる前に，微分方程式と解の関係に慣れるとよい．

例１：

(1)　$y = c_1 x \cos(\ln x) + c_2 x \sin(\ln x) + x \ln x$

が

(2) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+2y=x\ln x$

の解であることを示せ．

(1)を微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\left(c_2-c_1\right)\sin(\ln x)+\left(c_2+c_1\right)\cos(\ln x)+\mathrm{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(c_2+c_1\right)\frac{\sin(\ln x)}{x}+\left(c_2-c_1\right)\frac{\cos(\ln x)}{x}+\frac{}{x}$$

となる．もとの微分方程式へ代入にすると解であることが検証できる．

4.　１階１次の微分方程式

この種類の微分方程式は $Mdx+Ndy=0$ の形になる．ここで M,N は x,y の関数である．解法との関連で，さらに分類される．

- **変数分離（Variable Separable）**：微分方程式の各項を整理・変形して

  (A)　$f(x)dx+F(y)dy=0$

  の形になるとき，この変形作業を変数分離（separation of the variables）と呼ぶ．ただし $f(x),F(y)$ は，それぞれ x および y だけの関数である．(A)の形になれば，微分方程式は直ちに積分することができる．すなわち c を任意定数として

  (B) $\int f(x)dx+\int F(y)dy=c$

  が微分方程式（A）の一般解である．

  ✓ (A)の形で与えられていない微分方程式は，次のようにして変数分離の形に変形できることがある．例によって示す：

  $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$ の場合

  ✓ 第一段階：有理関数の分母を払う．もし導関数が含まれるなら独立変数の微分を両辺にかける：

  $$(1+x^2)xy\,dy=(1+y^2)dx$$

  ✓ 第二段階：同じ微分を持つ項をまとめて $X_1Y_2dx+Y_1X_2dy=0$ の形にする（できなければ，この方法は適用できない）．X_1,X_2 は x だけの関数．Y_1,Y_2 は y だけの関数．こうしてから両辺を X_2Y_2 で割れば $\dfrac{X_1}{X_2}dx+\dfrac{Y_1}{Y_2}dy=0$ すなわち(A)の形となる：

  $$(1+y^2)dx-(1+x^2)xy\,dy=0$$

  $$\frac{1}{(1+x^2)x}dx-\frac{y}{(1+y^2)}dy=0$$

- 第三段階：各項を別個に積分し(B)を得る：

$$\frac{1}{(1+x^2)x}dx - \frac{y}{(1+y^2)}dy = 0$$
$$\int\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right]dx - \int\frac{y}{(1+y^2)}dy = \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = c$$
$$\ln\left((1+x^2)(1+y^2)\right) = 2\ln x - 2c = \ln x^2 + \ln C = \ln Cx^2$$
$$(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$$

例題：

$$a\left(x\frac{dy}{dx} + 2y\right) = xy\frac{dy}{dx} \quad \to \ axdy + 2aydx = xydy$$
$$\to \quad 2aydx + x(a-y)dy = 0 \ \to \ \frac{2a}{x}dx + \frac{a-y}{y}dy = 0$$
$$2a\int\frac{dx}{x} + a\int\frac{dy}{y} - \int dy = 2a\ln x + a\ln y - y = c$$
$$a\ln\left(x^2y\right) = c + y \quad \to \quad x^2y = e^{\frac{c+y}{a}} = Ce^{\frac{y}{a}}$$

- **斉次（homogeneous）**
  - 微分方程式 $Mdx + Ndx = 0$ において M, N がそれぞれ x, y の斉次関数でありかつ同次であるとき，この微分方程式は斉次であるという．（ある関数が x, y の関数において，$x \to \lambda x, y \to \lambda y$ なる置きかえをし，それがもとの関数を λ の n 乗倍したものになるとき，その関数を斉次関数という． n をその次数という.）
  - このような微分方程式は $y = vx$ という置き換えをすれば変数分離の形になる.
  - 例題：

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx} \to y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0, \left[y = vx, \ \ dy = vdx + xdv\right]$$
$$\to$$
$$v^2x^2dx + (x^2 - vx^2)(vdx + xdv) = 0 \to x^2vdx + x^3(1-v)dv = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{1-v}{v}dv = 0 \to \ln x + \ln v - v = c \to \ln vx = c + v$$
$$vx = Ce^{v} \Rightarrow y = Ce^{\frac{y}{x}}$$

- **線形方程式**
  - 微分方程式において従属変数 y もその導関数も 1 次で現れるとき，これを線

形（linear）であるという．１階の線形微分方程式は

(A) $$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

の形になる．ただし，P,Q は x だけの関数（あるいは定数）である．

✓ (A)を積分するには

(B) $$y=\ \ u$$

とおく．ここで，u を x の関数とし z を新しい変数とする．

✓ (B)を微分すると

(C) $$\frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}$$

であり，これを(A)(B)に代入すると $u\dfrac{dz}{dx}+z\dfrac{du}{dx}+Puz=Q$ したがって

(D) $$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)=Q$$

となる．

✓ できるなら，z の係数がゼロとなるように関数 u を決める．すなわち

$$\frac{du}{dx}+Pu=0$$

そうすると

$$\frac{du}{u}=-Pdx\Rightarrow \ln u=-\int Pdx+C$$

だから

(E) $$u=c_1e^{-\int Pdx}$$

である．

✓ このとき(D)は

$$u\frac{dz}{dx}=Q$$

となる．この u に(E)を代入すると，z が求まる．実際

$$c_1e^{-\int Pdx}\cdot\frac{dz}{dx}=Q\Rightarrow c_1dz=Q\cdot e^{\int Pdx}dx$$

より

(F) $$c_1z=\int Qe^{\int Pdx}dx+C$$

✓ (A)の解は(E)(F)を(B)に代入し

(G) $y=e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right)$

となる．

- ✓ (G)が解であることは，これを(A)に代入すれば検証できる．
- ✓ 以上の解法のアイデアは，P=定数，Q=0 の場合の解 $y=Ae^{-Px}$ を基礎にしている．P が定数ではないとき指数関数の肩が $Px\to\int Pdx$ となり，さらに Q がゼロでないとき積分定数 A を x の関数であるとたもの．実際，$y=uz$ とおいたことが後者に対応し，その結果得られる $\dfrac{du}{dx}+Pu=0$ が Q=0 のときの解を与えている．
- ✓ 例題：

(1) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

1 階の線形微分方程式である：

$$P=-\frac{2}{x+1},\ Q=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$y=uz,\quad \frac{dy}{dx}=u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx},$$

$$u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}-\frac{2uz}{1+x}=(1+x)^{\frac{5}{2}}$$

あるいは

(2) $u\dfrac{dz}{dx}+z\left(\dfrac{du}{dx}-\dfrac{2u}{1+x}\right)=(1+x)^{\frac{5}{2}}$

ここで

$$\frac{du}{dx}-\frac{2u}{1+x}=0,\quad \frac{du}{u}=\frac{2dx}{1+x}\Rightarrow \ln u=2\ln(1+x)$$

簡単のために積分定数を 0 と置いている．すなわち

(3) $u=(1+x)^2$

を要請する．

こうして(2)は

$$u\frac{dz}{dx}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

となり，そのときの u が(3)で与えられているので

$$\frac{dz}{dx}=(x+1)^{\frac{1}{2}}\quad\to\quad dz=(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

(4) $$z=\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

これら(3)(4)を $y=uz$ に代入すると

$$y=\frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{3}+C(x+1)^2$$

- **線形方程式に帰着する場合**

✓ $\dfrac{dy}{dx}+Py=Qy^n$

$z=y^{-n+1}$ とする.

$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}=(-n+1)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$ だから y^{-n} を微分方程式の両辺にかけて

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q\ \rightarrow\left(\frac{1}{-n+1}\right)\frac{dz}{dx}+Pz=Q$$

$\rightarrow$

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)Pz=(-n+1)Q$$
$$\frac{dz}{dx}+\tilde{P}z=\tilde{Q}$$

5. n 階 1 次微分方程式

- **定係数線形微分方程式**

t を独立変数とする関数 $x(t)$ について（従って x が従属変数）次の微分方程式

(A) $$\frac{d^nx}{dt^n}+p_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+p_nx=0,$$ $p_1,p_2,\cdots,p_n$ は定数.

を n 階定係数線形（あるいは 1 次）微分方程式という。この方程式を解くために以下に定義する特性方程式を考察する。

✓ $x=e^{rt}$ とおくと $\left(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_n\right)e^{rt}=0$ である。すなわち，

$x=e^{rt}$ という形の解であれば，その r は $\left(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_n\right)=0$ を満たす必要がある.

(B) $$\left(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_n\right)=0$$

を与えられた微分方程式（A）に対する特性方程式といい，その解 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ を特性根という.

例：2 階定係数線形微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2 x=0$$

の特性方程式を求める。解が $x(t)=e^{rt}$ の形をするためには，これを与式に代入し

$$r^2e^{rt}+\gamma re^{rt}+\omega^2 e^{rt}=e^{rt}\left(r^2+\gamma r+\omega^2\right)=0, \quad e^{rt}\neq 0$$

より

$$r^2+\gamma r+\omega^2=0$$

が条件となる。この式が特性方程式である。微分方程式の解が満たす条件を代数方程式の形で表現したものである。微分方程式のある種のイメージとなっている。この特性方程式の根，すなわち特性根は

$$r_1=\frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}{2}, \quad r_2=\frac{-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}{2}$$

であり，両方とも実数となる場合，両方が実数で等しい場合，互いに複素共役になる場合の 3 通りがある。

- n 階定係数線形微分方程式の場合，特性根が全て実数で，しかも全て異なるときは

  (C)　$e^{r_1t}, e^{r_2t}, \cdots, e^{r_nt}$

  を作れば，これらは(A)の解である.

  ✓　任意定数 $c_1,\cdots,c_n$ を用いて

  (D)　$c_1e^{r_1t}, c_2e^{r_2t}, \cdots, c_ne^{r_nt}$

  も(A)の解であり，それらの線形結合

  (E)　$x(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+\cdots+c_ne^{r_nt}$

  は(A)の一般解となる．一方（C）（D）は特殊解である.

- 特性方程式の解が複素数のとき

  ✓　特性方程式の係数が実数だから，複素根としては常に複素共役が対となる.

例：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\gamma\dfrac{dx}{dt}+\omega^2x=0$ の特性解 $r_1=\dfrac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}{2}$，$r_2=\dfrac{-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}{2}$ が複素共役の場合について，もし解 $x(t)$ が実数であるとすると，$x(t)$ はどのような形となるか調べる。

$r_1 = a + ib,\ r_2 = a - ib$ とおき，$e^{r_1 t}$ と $e^{r_2 t}$ の係数を c_1 および c_2 として，線形結合をつくると

$$
\begin{aligned}
x &= c_1 e^{(a+bi)t} + c_2 e^{(a-ib)t} = e^{at}\left(c_1 e^{ibt} + c_2 e^{-ibt}\right) \\
&= e^{at}\left(c_1(\cos bt + i\sin bt) + c_2(\cos bt - i\sin bt)\right) \\
&= e^{at}\left((c_1 + c_2)\cos bt + i(c_1 - c_2)\sin bt\right)
\end{aligned}
$$

である。この解が実数であるためには，c_1 および c_2 が互いに複素共役でなければいけない。すなわち $c_1 = u + iv,\quad c_2 = u - iv$ とおけば，$c_1 + c_2 = 2u$ および $i(c_1 - c_2) = -2v$ である。こうして

$$
\begin{aligned}
x &= e^{at}\left((c_1 + c_2)\cos bt + i(c_1 - c_2)\sin bt\right) \\
&= e^{at}\left(2u\cos bt - 2v\sin bt\right)
\end{aligned}
$$

となる。この形はさらに

$$x = Ae^{at}\cos(bt + \varphi)$$

と表すこともできる。なぜなら $A\cos(bt+\varphi) = A\cos bt\cos\varphi - A\sin bt\sin\varphi$ から，$2u = A\cos\varphi,\ \ 2v = A\sin\varphi$ とおけばよいからである。書き直すと

$$A = 2\sqrt{u^2 + v^2} = 2|c_1| \text{ および } \tan\varphi = \frac{v}{u} = \arg(c_1)$$

である。

- 特性方程式が重根をもつとき

  r1 と r2 とが重根（すなわち等しい）とすると，それらから作る解の定数倍は互いに独立にはなり得ない。すなわち，$e^{r_1 t} = e^{r_2 t} \Rightarrow c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = (c_1 + c_2)e^{r_1 t}$ となってしまう。特性方程式が p 重根の場合に p 個の解があるかのように思えば n 次の特性方程式の根の数は n 個となる。その意味で，対応する微分方程式の解も見かけ上 n 個になる。これら n 個の解 $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \cdots, e^{r_n t}$ は，すべてが独立ではないから，それらに任意定数である係数を与えて線形結合したとしても，n 個の自由度を持つわけではない。したがって n 個の解 $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \cdots, e^{r_n t}$ から一般解を構成することができない。

✓ 特性方程式が重根を持つときには，$t^q e^{rt}, q = 1, 2, ..., p-1$（p重根の場合）の形の解がある。

✓ 例

$x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$，特性方程式は $(r-a)^3=0$

$x=e^{at}u(t)$とおくと

$x'=ae^{at}u+e^{at}u'=e^{at}(au+u')$

$x''=ae^{at}(au+u')+e^{at}(au'+u'')=a^2e^{at}u+2ae^{at}u'+e^{at}u''$

$\quad =e^{at}\left(a^2u+2au'+u''\right)$

$x'''=ae^{at}\left(a^2u+2au'+u''\right)+e^{at}\left(a^2u'+2au''+u'''\right)$

$\quad =e^{at}\left(\left(a^3u+2a^2u'+au''\right)+\left(a^2u'+2au''+u'''\right)\right)$

$\quad =e^{at}\left(a^3u+3a^2u'+3au''+u'''\right)$

これらをもとの微分方程式に代入し

$\left(a^3u+3a^2u'+3au''+u'''\right)-3a\left(a^2u+2au'+u''\right)+3a^2(au+u')-a^3u$

$=u'''=0$

よって$x=e^{at}u(t)$とおいたときの$u(t)$は次数２の多項式である。

特性方程式$(r-a)^3=0$のとき解は$x(t)=e^{at}\left(c_1+c_2t+c_3t^2\right)$

例：

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\gamma\dfrac{dx}{dt}+\omega^2x=0$ の特性根が２重根 r = a のときの解の形を調べる。

計算を簡単にするには，特性方程式が重根を持つことをあらわに示すように，微分方程式の形を変更する。すなわち $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2a\dfrac{dx}{dt}+a^2x=0$ とする(2a=γ の置き換えをした)。一般的処方に従って，解が $u(t)\cdot e^{rt}$ の形を持つと仮定し，$u(t)$ の従う方程式を求めると

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)e^{at}\right)=\frac{du}{dt}e^{at}+u\cdot\left(ae^{at}\right)=\left(\frac{du}{dt}+au\right)e^{at}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(t)e^{at}\right)=\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{du}{dt}+au\right)e^{at}\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}+au\right)\right)e^{at}+\left(\frac{du}{dt}+au\right)ae^{at}$$

$$=\left(\frac{d^2u}{dt^2}+2a\frac{du}{dt}+a^2u\right)e^{rt}$$

となるので

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}+2a\frac{du}{dt}+a^2u\right)e^{at}-2a\left(\frac{du}{dt}+au\right)e^{at}+a^2ue^{at}=\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)e^{rt}=0$$

従って，$\dfrac{d^2u}{dt^2}=0$ を満たす u は，$u=(c_1+c_2t)$ である。この微分方程式の一般解として

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{at}=(c_1+c_2t)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

を得る。

✓ ここで，なぜ２重根のとき $(c_1+c_2t)e^{at}$ の形の解となるかを，別の面から考察しよう。それには，「重根となる直前」の状態で線形結合をつくり極限として重根へ持って行く。すなわち

$$\frac{e^{a_1t}-e^{a_2t}}{a_1-a_2}\Rightarrow\lim_{a_1\to a_2}\frac{e^{a_1t}-e^{a_2t}}{a_1-a_2}=te^{a_2t}\,(e^{at}\text{を}a\text{で微分したもの})$$

なる解を予測することができるだろう。線形結合の取り方はむ数にあるから，ここで示した係数の取り方をするのは，いわば答えを知っているからである。しかし，定数変化法で機械的に解を導くのに比べると，特性方程式の重根 a から必然的に e^{at}, te^{at} の２個の解が現れることを感じとれるのではなかろうか。なお，これら２つの解は線形独立であることが別途証明される。

- 非斉次のとき
  - ➢ すなわち $x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x'+a_0x=f(t)$
  - ➢ 以下の記述を簡単にするため，線形微分演算子 L を導入する：
    - ✧ $L[x]=\left[\dfrac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\dfrac{d}{dt}+a_0\right]x$ と書けば
    - ✧ 斉次方程式は $L[x]=0$，非斉次方程式は $L[x]=f(t)$
  - ➢ 非斉次方程式の解を求めて斉次方程式の一般解との線形和をとる
    - ✧ 非斉次方程式の解（特解）を１つ見つけたとしよう：$L[x_s]=f(t)$
    - ✧ 斉次方程式の解は求まる（一般解：積分定数）：$L[x_h]=0$
    - ✧ $L[x_s+x_h]=L[x_s]+L[x_h]=f(t)+0=f(t)$ より，$x(t)=x_s(t)+x_h(t)$ が非斉次方程式の一般解である。