７．回路の過渡応答と共振

基本事項

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) \tag{19.31}$$

とすると，つぎが成り立つ．

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0) \tag{19.32}$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \tag{19.33}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^m}{dt^m}y(t)\right] &= s^mY(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{m-k}y^{(k-1)}(0) \\ &= s^mY(s) - s^{m-1}y(0) - s^{m-2}y^{(1)}(0) - \\ &\qquad \cdots - y^{(m-1)}(0)\end{aligned} \tag{19.34}$$

$$\mathcal{L}[u_s(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \tag{19.51}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \tag{19.52}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{19.53}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \tag{19.54}$$

$$\mathcal{L}[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2} \tag{19.55}$$

$$\mathcal{L}[t^ne^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \tag{19.56}$$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{19.57}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{19.58}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{19.59}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{19.60}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (\delta(t)\ \text{はデルタ関数}) \tag{19.61}$$

実力問題

Q1. 起電力 E の電池と，RC 直列回路がスイッチを介して接続している．はじめはスィッチが開いており，コンデンサーの電圧がV_0である．$t = 0$でスイッチを閉じた後のコンデンサーの電圧$V_C(t)$を表す式を求めよ．［技術士 H22］

A1. スィッチを閉じた状態で回路を流れる電流を$I(t)$とすると，抵抗の両端の電圧が$V_R = RI(t)$，コンデンサーの両端の電圧が$V_C(t) = \frac{1}{C}Q(t)$（$I(t) = \frac{dQ}{dt}$，$Q(t) = \int I(t)dt$） だから，$E = V_R + V_C = RI(t) + \frac{1}{C}Q(t)$． 両辺を t で微分すると, E = 一定だから,

$$0 = R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I$$

Iに対する初期条件は，$t = 0$で抵抗に加わる電圧が$E - V_0$であることから決まり,

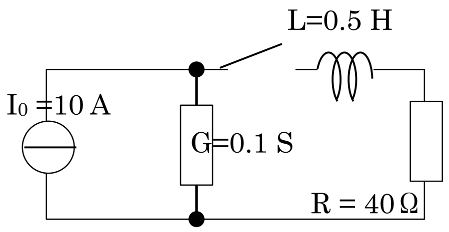
$$I(0) = \frac{1}{R}(E - V_0)$$

となる．微分方程式をラプラス変換すると

$$0 = R\big(s\mathcal{L}[I] - I(0)\big) + \frac{1}{C}\mathcal{L}[I] = \left(sR + \frac{1}{C}\right)\mathcal{L}[I] - RI(0) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[I] = \frac{I(0)}{s + \frac{1}{RC}} \quad \rightarrow \quad I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\therefore I(t) = \frac{1}{R}(E - V_0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad V_C(t) = E - V_R = E - RI = E - (E - V_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Q2. 10 A の理想的な定電流源（内部抵抗を無限大と考える）に図の回路(コンダクタンス* G = 0.1 S，抵抗 R = 40 Ω，インダクタンス L=0.5 H）を接続しスイッチを閉じたとき，生じる過渡現象の時定数を求めよ．[技術士 H23]



注：**コンダクタンス**は電気の流れやすさを表す量で，インピーダンスの逆数．本問では実数の値だから，この素子は純抵抗である．単位 S（ジーメンス）．抵抗値の逆数である．

A2. スイッチを閉じた状態で電源側から見たとき，回路に流れる電流 I(t)はコンダクタンスとコイル・抵抗の並列となるので，

$$I_0 = I_G + I_{LR},\qquad \frac{1}{G}I_G = L\frac{dI_{LR}}{dt} + RI_{LR} \quad\rightarrow\quad I_G = G\left(L\frac{dI_{LR}}{dt} + RI_{LR}\right) = I_0 - I_{RL} \quad\rightarrow\quad I_0 = GL\frac{dI_{LR}}{dt} + (GR+1)I_{LR}.$$

ラプラス変換を行うと

$$\frac{I_0}{s} = GL\left(s\mathcal{L}[I_{LR}] - I_{LR}(0)\right) + (GR+1)\mathcal{L}[I_{LR}] \quad\rightarrow\quad \mathcal{L}[\mathrm{I}_{LR}] = -\frac{I_0}{(GR+1)\,s} + \frac{1}{(GR+1)}\frac{I_0 + (GR+1)\,I_{LR}(0)}{s - \frac{GR+1}{GL}}$$

逆変換により $$I_{LR} = -\frac{I_0}{GR+1} + \frac{I_0 + (GR+1)\,I_{LR}(0)}{GR+1}\,\mathrm{e}^{\frac{R+\frac{1}{G}}{L}t}$$

よって，過渡現象は指数関数的な電流の増加であり，その時定数は$\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}}$（指数関数的減少ではないが）と書いたときの τ だから

$$\left(\frac{R+\frac{1}{G}}{L}\right)^{-1} = \frac{0.5\ \mathrm{H}}{40\ \Omega + \frac{1}{0.1}\mathrm{S}} = \frac{0.5}{50}\mathrm{s} = 0.01\ \mathrm{s}$$

Q3. C を充電したのち LC 直列回路の両端をつないだときの回路に流れる電流の振る舞いを調べよ．

A3. $L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\,dt = 0 \rightarrow L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I = 0$，ラプラス変換を行うと

$$L\left(s^2\mathcal{L}[I] - sI(0) - I'(0)\right) + \frac{1}{C}\mathcal{L}[I] = 0 \quad\rightarrow\quad \left(Ls^2 + \frac{1}{C}\right)\mathcal{L}[I] - s\,LI(0) - L\,I'(0) = 0,\quad \text{初期条件として}I(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[I] = \frac{sLI(0) + L\,I'(0)}{Ls^2 + \frac{1}{C}} = \frac{sI(0) + I'(0)}{s^2 + \frac{1}{CL}} = \frac{I'(0)}{s^2 + \frac{1}{CL}}$$

$$I(t) = I'(0)\sqrt{LC}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

補講 未完

単パルス　V(t)= 電圧 high(1)の幅が τ，それ以外 low(0)．RC 直列回路の両端に加わる．C 両端の電圧波形．$V_C(0)=0$とする．

$$\mathcal{L}[V]=\int_0^\infty V(t)e^{-st}\,dt=\int_0^\tau 1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}(1-e^{-s\tau})$$

$$V(t)=RI(t)+\frac{1}{C}\int I(t)dt \quad \to \mathcal{L}\left[\frac{dV}{dt}\right]=R\mathcal{L}\left[\frac{dI}{dt}\right]+\frac{1}{C}\mathcal{L}[I] \to \mathcal{L}\left[\frac{dV}{dt}\right]=s\,\mathcal{L}[V]-V(0)=R\bigl(s\mathcal{L}[I]-\mathrm{I}(0)\bigr)-\frac{1}{C}\,\mathcal{L}[I]$$

$$\mathcal{L}[V]-V(0)=R\bigl(s\mathcal{L}[I]-\mathrm{I}(0)\bigr)-\frac{1}{C}\,\mathcal{L}[I]=\left(sR-\frac{1}{C}\right)\mathcal{L}[I]-RI(0) \quad \to \mathcal{L}[I]=\frac{\mathcal{L}[V]-V(0)+\ RI(0)}{sR-\frac{1}{C}}$$

$$\mathcal{L}[I]=\frac{\mathcal{L}[V]-V_C(0)}{sR-\frac{1}{C}}=\frac{\mathcal{L}[V]}{sR-\frac{1}{C}}=\frac{\frac{1}{R}(1-e^{-s\tau})}{s(s-\frac{1}{RC})}=C(1-e^{-s\tau})\left\{\frac{-1}{s}+\frac{1}{\left(s-\frac{1}{RC}\right)}\right\}$$

パルス V(t)= 電圧 high(1)の幅が τ，それ以外 low(0)，繰り返し周期 T のパルス列．(V(0)=1) .RC 直列回路の両端に加わる．C 両端の電圧波形.

1）一般に，周期関数のラプラス変換

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt&=\int_0^{\mathrm{T}} f(t)e^{-st}\,dt+\int_{\mathrm{T}}^{2\mathrm{T}} f(t)e^{-st}\,dt+\cdots\\&=\int_0^{\mathrm{T}} f(t)e^{-st}\,dt+\int_0^{\mathrm{T}} f(t+T)e^{-s(t+T)}\,dt+\int_0^{\mathrm{T}} f(t+2T)e^{-s(t+2T)}\,dt\cdots\\&=\int_0^{\mathrm{T}} f(t)e^{-st}\,dt\times\{1+e^{-st}+e^{-2st}+\cdots\}=\int_0^{\mathrm{T}} f(t)e^{-st}\,dt\times\frac{1}{1-e^{-sT}}\end{aligned}$$

2)題意のパルスについて，

$$\int_0^{\mathrm{T}} f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^\tau 1\cdot e^{-st}\,dt+\int_\tau^T 0\cdot e^{-st}\,dt=\int_0^\tau e^{-st}\,dt=\frac{1}{-s}(e^{-s\tau}-1)=\frac{1}{s}(1-e^{-s\tau})$$

$$\mathcal{L}[f]=\int_0^{\mathrm{T}} f(t)e^{-st}\,dt\times\frac{1}{1-e^{-sT}}=\frac{1}{s}\frac{(1-e^{-s\tau})}{1-e^{-sT}}$$

3）電流$I(t)$，入力電圧$V(t)=f(t)$

$$V(t)=RI(t)+\frac{1}{C}\int I(t)dt \quad \to \mathcal{L}\left[\frac{dV}{dt}\right]=R\mathcal{L}\left[\frac{dI}{dt}\right]+\frac{1}{C}\mathcal{L}[I] \to \mathcal{L}\left[\frac{dV}{dt}\right]=s\,\mathcal{L}[V]-V(0)=R\bigl(s\mathcal{L}[I]-\mathrm{I}(0)\bigr)-\frac{1}{C}\,\mathcal{L}[I]$$

$$\mathcal{L}[V]-V(0)=R\bigl(s\mathcal{L}[I]-\mathrm{I}(0)\bigr)-\frac{1}{C}\,\mathcal{L}[I]=\left(sR-\frac{1}{C}\right)\mathcal{L}[I]-RI(0) \quad \to \mathcal{L}[I]=\frac{\mathcal{L}[V]-V(0)+\ RI(0)}{sR-\frac{1}{C}}=\frac{\mathcal{L}[V]-V_C(0)}{R\left(s-\frac{1}{RC}\right)}$$

ここに数式を入力します。