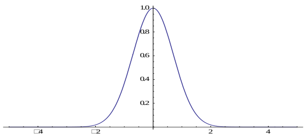
EM2　08　ベクトル解析

確認

Q1. 電位が$\phi(x,y,z)=\phi_0\, e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$で与えられるという．$\phi_0$は定数（単位はV），$a$は定数（単位はm）である．① x軸に沿って電位を測定した結果をグラフで表せ．② xy面内の電位の様子を等高線で表せ．③ この電位に対応する電場を計算せよ．④電場の様子を解説せよ．⑤電荷密度を計算しグラフで示せ．⑥電荷密度の様子を解説せよ．

A1. ①横軸はaを単位とし，縦軸はϕ_0を単位とする．②　横軸 x，縦軸 y

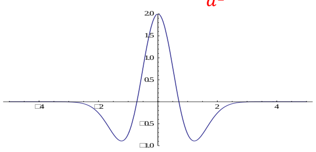


③ $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)=-\nabla\phi=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=2\frac{x\phi_0}{a^2}\left(e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2},0,0\right)$， $E_x(x,y,z)=2\frac{x\phi_0}{a^2}e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}, E_y=0,\ E_z=0$

④ 電場の向きは，$x>0(<0)$のときx軸正(負)方向．電場の大きさは y,z によらない．yz 平面($x=0$)では電場 0．$x=0$から離れるにしたがい，まず急激に大きくなり，ついで小さくなり 0 に近づく．

⑤ $\rho(x,y,z)=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}=-\varepsilon_0\nabla^2\phi=\ \varepsilon_0\frac{2\phi_0(a^2-2x^2)}{a^4}e^{-\frac{x^2}{a^2}}$

横軸x/a　　縦軸$\varepsilon_0\frac{2\phi_0}{a^2}$



⑥ yz 面について対称で yz 方向には変化がない

x=0で正の電荷があり，x=0から離れるにしたがい電荷が減り

x=$\frac{a}{\sqrt{2}}$で 0 となり，負のピークを越えたあと 0 に近づく

Q2. 電場$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, $r^2=x^2+y^2+z^2$のとき，①原点以外に電荷が存在しないことを示せ．②原点を中心とする半径Rの球面上で電場の面積分$\iint\vec{E}\cdot d\vec{S}$を計算せよ．ヒント：$d\vec{S}=dS\frac{\vec{r}}{r}$とせよ（球面上で微小な面積 dS をもち球面と垂直外向きの面積素片のベクトル$d\vec{S}$を用いる．dSをすべて寄せ集めると球面の面積：$\iint dS=4\pi R^2$）

A2 ①$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}+x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}+x\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}+x\frac{x}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}-x\frac{x}{r}\frac{3}{r^4}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right)$
$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right)+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)\right\}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3}{r^3}-3\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}\right)\right\}=0$　これらの計算では分母が 0 でないと仮定，i.e., 原点以外．②$\iint\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot dS\frac{\vec{r}}{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{r^2}{r^4}\cdot dS=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\iint dS=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}4\pi R^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$

Q3. z 軸にそって正方向に流れる直線電流Iがある．①周囲にどのような磁場（磁力線）ができるかを述べよ　②磁場$\vec{B}$を座標の関数として表せ．③$\nabla\times\vec{B}$を計算し，z 軸以外の位置で$\nabla\times\vec{B}$=0 を確認せよ．④半径Rの磁力線にそって$\vec{B}$の周回積分$\oint\vec{B}\cdot d\vec{r}$を計算せよ．

A3. ① 磁力線は電流に垂直な面内．電流を中心とする同心円である．磁場は電流から距離rの位置で大きさが$\mu_0\frac{I}{2\pi r}$，向きは同心円の接線方向，z 軸正方向から xy 面を見たとき反時計回り．② $\vec{B}(x,y,z)=\mu_0\frac{I}{2\pi r}\left(-\frac{y}{r},\frac{x}{r},0\right)$　③$\nabla\times\vec{B}=\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\left(0-0,0-0,\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(0,0,\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{r^2}\right)\right)$

$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(0,0,\left(\frac{1}{r^2}-2\frac{x^2}{r^4}\right)+\left(\frac{1}{r^2}-2\frac{y^2}{r^4}\right)\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(0,0,\left(\frac{2}{r^2}-2\frac{r^2}{r^4}\right)\right)=0\ \because\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^2}=\frac{1}{r^2}+x\frac{x}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r^2}-x\frac{x}{r}\frac{2}{r^3}=\frac{1}{r}-2\frac{x^2}{r^4}\right]$

④$\oint\vec{B}\cdot d\vec{r}=\oint\mu_0\frac{I}{2\pi r}\left(-\frac{y}{r}dx+\frac{x}{r}dy\right)=\mu_0\frac{I}{2\pi R}\left(\oint-\frac{R\sin\theta}{R}R(-\sin\theta\ d\theta)+\frac{R\cos\theta}{R}R(\cos\theta\ d\theta)\right)=\mu_0\frac{I}{2\pi}\oint d\theta=\mu_0 I$

Q4. $\nabla\cdot(\nabla\phi)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$を確認せよ．記号：$\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi=\Delta\phi$

A4. $\nabla\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

Q5. $\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$を確認せよ．

A5. $\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla\times\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\,\partial z}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2 E_x \\ \frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2 E_y \\ \frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2 E_z \end{pmatrix} = \nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$$

Q6. $\vec{B}(x,y,z) = B_0\,(0,0,e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}), r=\sqrt{x^2+y^2}$すなわち z 軸方向の磁場があり，その大きさが z 軸からの距離rの関数$e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}$であるとき，アンペールの法則により電流密度を計算せよ（電場は０）.

A6. $\vec{\mathrm{J}} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y},-\frac{\partial B_z}{\partial x},0\right)$

$$= \frac{B_0}{\mu_0}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{dr}e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2},-\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d}{dr}e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2},0\right) = \frac{B_0}{\mu_0}\left(-\frac{2r}{a^2}\right)e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}\left(\frac{y}{r},-\frac{x}{r},0\right) = \frac{B_0}{\mu_0}\left(\frac{2r}{a^2}\right)e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}\left(-\frac{y}{r},\frac{x}{r},0\right)$$

電流密度ベクトルの向きは z 軸に対する右ねじの回転方向．大きさは軸からの距離に対し$\left(\frac{2r}{a^2}\right)e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}$と変化する．