EM2　08　ベクトル解析

基本事項

・目的：「$\frac{d}{dx}g(x)$が$y=g(x)$のグラフの接線の傾き」という理解を手本に,$\nabla f, \nabla\cdot\vec{F}$, $\nabla\times\vec{F}$ のイメージをつかむ

・対象となる量を表す関数

$f(\vec{r})=f(x,y,z)$

各点 $\vec{r}=(x,y,z)$に実数$f(\vec{r})$を割り当てる関数.

例：位置エネルギー$V(\vec{r})$，電位$\phi(\vec{r})$，電荷密度$\rho(\vec{r})$

$\vec{F}(\vec{r})=(F_x,F_y,F_z)$

$F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z)$はそれぞれ各点 $\vec{r}=(x,y,z)$に実数$F_x(\vec{r})$などを割り当てる関数.

(F_x,F_y,F_z)はベクトルの成分であり，座標軸の回転により位置ベクトル$\vec{r}$の成分と同じように変化する.

例：電場$\vec{E}(\vec{r})$，磁場$B(\vec{r})$，電流密度$\vec{j}(\vec{r})$

時間的にも変動する量

電位$\phi(\vec{r},t)$，電荷密度$\rho(\vec{r},t)$，電場$\vec{E}(\vec{r},t)$，磁場$B(\vec{r},t)$，電流密度$\vec{j}(\vec{r},t)$

・電磁場の振る舞いを記す方程式（マクスウェル方程式）

$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$:　クーロンの法則，真空中に電荷の分布$\rho$.（電位との関係$\vec{E}=-\nabla\phi$, $\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$)

$\nabla\cdot\vec{B}=0$:（磁場についての“クーロンの法則”）磁気単極子が存在しない

$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$：アンペール・マクスウェルの法則，真空中に電流密度$\vec{j}$.

$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$：電磁誘導の法則,

マクスウェル方程式の外に，電荷保存則: $\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

・スカラー場（各点に１個の実数がある）は，２変数にして地図（各地点の高さ）をイメージする.

・スカラー場の勾配：$\nabla\phi=\mathrm{grad}\,\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$\nabla\phi$はϕが変化する向きと大きさを表すベクトル.

変数(x,y)のとき$z=\phi(x,y)$とすると，接平面の最大傾斜を表す.

接平面にそって$\nabla\phi$の向きに１だけ進むと$|\nabla\phi|$だけ高さが変わる.$\nabla\phi\cdot d\vec{r}=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=d\phi$

$\vec{E}=-\nabla\phi$: 電位の勾配が電場（と逆向き）.

・ベクトル場（各点に１個のベクトルがある）は，2 変数にして流速の矢印をイメージする.

・流れが「湧き出す」,「吸い込まれる」,「通過するだけ」の点を識別する計算法：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\left\{\frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\right\}\Delta y\Delta z=\{E_x(x+\Delta x,y,z)-E_x(x,y,z)\}\Delta S_x=E_x(x+\Delta x,y,z)\Delta S_x-E_x(x,y,z)\Delta S_x\to\iint\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$：　電気力線が湧き出す（正の電荷），吸い込まれる（負の電荷），他は通過・不生不滅

$\nabla\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$：電流（密度）が湧き出すところでは電荷（密度）が減る.

・流れの「回転」あるいは「渦」「ずれ」を識別する計算法：

$$\nabla\times\vec{E}=\mathrm{rot}\,\vec{E}=\mathrm{curl}\,\vec{E}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\E_x&E_y&E_z\end{matrix}\right\|$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\Delta y\,\Delta z=\left(E_z(x,y+\Delta y,z)-E_z(x,y,z)\right)\Delta z-\left(E_y(x,y,z+\Delta z)-E_y(x,y,z)\right)\Delta y\to\oint\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$: 電場に「ずれ」・「渦」がある場所では，磁場が時間的に変化している.

$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$：磁場に「ずれ」・「渦」がある所には電流があり，電場が時間的に変化している

確認

Q1. 電位が$\phi(x,y,z)=\phi_0\,e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$で与えられるという．$\phi_0$は定数（単位はV），$a$は定数（単位はm）である．

① x軸に沿って電位を測定した結果をグラフで表せ．

② xy面内の電位の様子を等高線で表せ．

③ この電位に対応する電場を計算せよ．

④電場の様子を解説せよ．⑤電荷密度を計算しグラフで示せ．

⑥電荷密度の様子を解説せよ．

Q2. 電場$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$，$r^2=x^2+y^2+z^2$のとき，

①原点以外に電荷が存在しないことを示せ．

②原点を中心とする半径Rの球面上で電場の面積分$\iint\vec{E}\cdot d\vec{S}$を計算せよ．

ヒント：$d\vec{S}=dS\frac{\vec{r}}{r}$とせよ（球面上で微小な面積dSをもち球面と垂直外向きの面積素片のベクトル$d\vec{S}$を用いる．dSをすべて寄せ集めると球面の面積：$\iint dS=4\pi R^2$）

Q3. z軸にそって正方向に流れる直線電流Iがある．

①周囲にどのような磁場（磁力線）ができるかを述べよ

②磁場$\vec{B}$を座標の関数として表せ．

③$\nabla\times\vec{B}$を計算し，z軸以外の位置で$\nabla\times\vec{B}$=0を確認せよ．

④半径Rの磁力線にそって$\vec{B}$の周回積分$\oint\vec{B}\cdot d\vec{r}$を計算せよ．

Q4. $\nabla\cdot(\nabla\phi)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$を確認せよ．記号：$\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi=\Delta\phi$

Q5. $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}$を確認せよ．

Q6. $\vec{B}(x,y,z)=B_0\,(0,0,e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}),r=\sqrt{x^2+y^2}$すなわちz軸方向の磁場があり，その大きさがz軸からの距離rの関数$e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}$であるとき，アンペールの法則により電流密度を計算せよ（電場は０）．