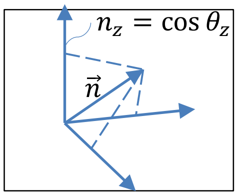
前期に電磁気現象の基本法則を学んだ．それらは「電場＝空間の電気的性質と磁場＝磁気的性質」が電荷と電流により変化する様子を述べるものであった．電気力線や磁力線は，実在するものではないが，空間の性質を視覚的にとらえるには便利な道具である．しかし，ことに時間的に変動する電場と磁場の様子，電場と磁場の関係を正確に把握し推論を組み立てようとすると，電気力線や磁力線だけに頼ることはできない．３次元空間内のベクトル場（空間の各点に電場や磁場というベクトルが付与されている）を数学的に取り扱う方法，ことにその空間的および時間的な変化を微分法を用いて扱う手法を会得する必要がある．

======================【スカラー場とベクトル場】======================================

【スカラー場】空間の各点にスカラーが与えられているとき，その空間はスカラー場であるという．たとえば電荷密度はスカラー場である．また電位はスカラー場である．スカラー場という概念は電磁気現象に限らず，たとえば温度が空間の各点の関数として与えられていれば，温度の場はスカラー場である．電荷密度は$\rho(x,y,z,t)$あるいは$\rho(\vec{r},t)$のように書く．電位は$\varphi(x,y,z,t)$あるいは$\varphi(\vec{r},t)$のように書く．これらは，引数で与えた位置$\vec{r}=(x,y,z)$における電荷密度や電位が，時刻tにどのような値（スカラー）となっているかを示す４変数のスカラー関数である．

【ベクトル場】空間の各点にベクトルが与えられているとき，その空間はベクトル場であるという．たとえば電場はベクトル場である．磁場もベクトル場である．電流密度もベクトル場である．ベクトル場という概念は電磁気現象に限らず，たとえば力が空間の各点の関数として与えられていれば，力の場はベクトル場である．流体では速度の場がベクトル場である．電場は$\vec{E}(x,y,z,t)$あるいは$\vec{E}(\vec{r},t)$のように書く．磁場(磁束密度)は$\vec{B}(x,y,z,t)$あるいは$\vec{B}(\vec{r},t)$のように書く．これらは，引数で与えた位置$\vec{r}=(x,y,z)$における電場や磁場が，時刻tにどのような値（ベクトル）となっているかを示す４変数のベクトル関数である．

３次元のベクトル関数の値は３つの成分をもつ．$\vec{E}=\left(E_x,E_y,E_z\right)=E\,\vec{n}$．ここで$E=|\vec{E}|$すなわち電場の大きさ（電場の大きさはスカラーである）．$\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$は$\vec{E}$の向きを表すベクトルで$|\vec{n}|=1$すなわち単位ベクトル．$\vec{n}=(\cos\theta_x,\cos\theta_y,\cos\theta_z)$と表すと，それぞれの角度は$\vec{n}$と各座標軸とのなす角である．



【補遺】スカラーとベクトルは，もともとは，座標系の回転における振る舞いで区別される量として導入された．（その後，数学者がベクトルの概念を一般化して線型空間の元をすべてベクトルと呼ぶことになった）．ベクトルは，たとえば位置ベクトルのように，同じベクトルが座標の回転すなわち見る向きにより「長く見えたり短く見えたり」する．３次元ベクトルは３個の成分をもつが，座標を回転すると３つの成分が独特のしかたで絡み合って変化する（回転行列で表現される変化）．これに対してスカラーは座標を回転しても値が変わらない．同じ位置にあるスカラー（たとえば温度）はどの方向から見ても同じ値である．

<< 二次元の回転行列 >> <u>座標系を時計回り</u>にθ回転したとき，同じベクトルの成分が変化する様子：

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

==========================【スカラー場の勾配を表すベクトル場: ∇φ】====================================

スカラー場である電位$\varphi(\vec{r})$の空間的な変化を局所的に観察する手法を復習する（時間的な変化は，空間的な変化とは別のことになるので，雑さをさけるため変数を$\vec{r}$だけで書く）．

位置$\vec{r}=(x,y,z)$と，ほんのわずかに離れた位置$\vec{r}+d\vec{r}=(x+dx,y+dy,z+dz)$とで，$\varphi$の値がどのくらい変化するかを示す量が$d\varphi$である：

$$d\varphi=\varphi(\vec{r}+d\vec{r})-\varphi(\vec{r})=\varphi(x+dx,y+dy,z+dz)-\varphi(x,y,z)$$

$\vec{r}$を具体的にどの位置にするか，$d\vec{r}$を具体的にどの向きにするかは，自由に設定できる．ただし$d\vec{r}$の大きさは次の線型の関係が成

り立つほど非常に小さい:

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

この式を

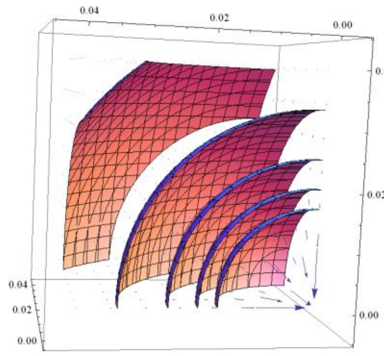
$$\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

と$d\vec{r}=(dx,dy,dz)$の内積（スカラー積）とみなして

$$d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\vec{r}$$

と記すことがよくある．$\nabla\varphi$は「ナブラ　ファイ」あるいは「グラディエント　ファイ」と読む．後者は，同じ量を$\nabla\varphi=\mathrm{grad}\,\varphi$と書いたことによる（昔は grad しか使わなかった）．$\nabla\varphi$はベクトルであり，その大きさはφの最大傾斜の大きさ，その向きは最大傾斜の向きを表す．∇は，スカラー関数からベクトルをつくる演算となっている．

【例】φがx軸方向にだけ変化するとき（yやzによらずxの値だけでφの値が決まる，φの値は yz 面内はどこでも同じ），$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$となるので，$\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},0,0\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,0,0)$となる．$\nabla\varphi$の大きさと向きを確認せよ．



【例】$\varphi=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$のとき，合成関数の偏微分法により

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\varphi}{dr},\quad さらに\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{d\varphi}{dr}=-\frac{1}{r^2}\rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}$$

よって

$$\nabla\varphi=\left(-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r},-\frac{1}{r^2}\frac{y}{r},-\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{(x,y,z)}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

すなわち，大きさが原点からの距離の 2 乗に反比例し，原点に向かうベクトルである．

$\nabla\varphi$は$\varphi=$一定の面（等電位面）と直交する．なぜなら，$d\varphi=\nabla\varphi\cdot d\vec{r}$において等電位面上の移動$d\vec{r}$によって生じる電位の変化は（「等」電位だから）$d\varphi=0$，$\nabla\varphi$ と$d\vec{r}$の内積が 0 となり両者は直交する．

【∇fの線積分】

径路 C の上で，$\vec{r}$から$\vec{r}+d\vec{r}$まで，微小な移動$d\vec{r}$を行う．ここではスカラー関数をfとしよう(φでもよかったのだが)．

点$\vec{r}$におけるベクトル∇fと$d\vec{r}$の内積$\nabla f\cdot d\vec{r}$をとる作業を，A 端から B 端まで径路 C 上を移動しながら繰り返し，$\nabla f\cdot d\vec{r}$の総和を求めることを次の式であらわす：

$$\int_{\mathrm{C:A\to B}}\nabla f\cdot d\vec{r}$$

この積分を，∇fの線積分と呼ぶ．微小な移動について

$$\nabla f\cdot d\vec{r}=df=f(\vec{r}+d\vec{r})-f(\vec{r})$$

であるから，微小な移動を続けていくと

$$\int_{\mathrm{C:A\to B}}\nabla f\cdot d\vec{r}=f(\mathrm{B})-f(\mathrm{A})$$

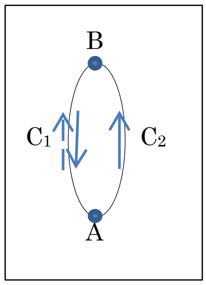
となる．すなわち移動の経路が異なっても<u>両端点が同じであれば，∇fの線積分は同じ値</u>（両端におけるfの差）を得る．

【∇fの周回積分】

閉じたループを 1 周する径路上の線積分を周回積分という．閉ループ C 上に 2 点 A,B をとりC_1とC_2に分割する．まず，ひとつの径路C_1を A から B に進む線積分と，同じ径路を逆に B から A に進む線積分は，互いに符号を反転したものである：

$$\int_{C_1:A\to B} \nabla f \cdot d\vec{r} = -\int_{C_1:B\to A} \nabla f \cdot d\vec{r}$$

なぜなら，２つの積分は径路上のどの点も全く同じように通過するが，どの点においても微小な変位$d\vec{r}$が逆向きとなるので，それぞれの点における内積の符号が反転するからである．こうして，周回積分は



$$\oint_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_{C_1:A\to B} \nabla f \cdot d\vec{r} + \int_{C_2:B\to A} \nabla f \cdot d\vec{r} = -\int_{C_1:B\to A} \nabla f \cdot d\vec{r} + \int_{C_2:B\to A} \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$$

最後の等号は，∇fの線積分の値が径路によらないことを用いた．重要な結論：∇fの周回積分は 0 である．

逆に，あるベクトル場$\vec{F}$が任意の閉ループについて周回積分が 0 となるとき，$\vec{F} = -\nabla f$となるスカラー場fがある．実際

$$f(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_S}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

の右辺の線積分は径路によらないので，位置$\vec{r}$だけのスカラー関数として$f(\vec{r})$を定義出来る．ただし基準点$\vec{r}_S$のとりかたには任意性がある（積分定数と同様）．つぎに，微小な変位に対しては，常に$df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = \nabla f \cdot d\vec{r}$となるが，線積分の計算では

$$df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = -\left(\int_{\vec{r}_S}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_S}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

したがって$\nabla f \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$．　$d\vec{r}$は任意だから，$-\nabla f = \vec{F}$．よって，任意の閉ループについて周回積分が 0 となるベクトル場$\vec{F}$からスカラー場$f(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_S}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ をつくると$\vec{F} = -\nabla f$である．いいかえると，このようなベクトル場はスカラー場fの勾配∇fにより与えられる．

================【ベクトル場$\vec{F}$の湧き出し・吸い込みを表すスカラー関数を得る演算：$\nabla \cdot \vec{F}$】=====================

ベクトル場として電流密度$\vec{j}$を例にとる．ある点から電流が湧き出している（あるいは，電流が吸い込まれている）とき，その湧き出し（あるいは吸い込み）の量を計算する手順を考察する．もちろん，保存則から電荷が減少あるいは増大しているので，その点の電荷密度の時間変化に注目すれば湧き出しや吸い込みの量を算出できるが，ここでは電流密度に注目して計算を行う．

【１次元の電流】

3 次元空間のどの位置でもx軸正方向の流れがあり，その大きさはx軸と垂直な面内で同じとする：$\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$，$j_x(x)$，$j_y = j_z = 0$．
座標軸と平行な辺をもつ微小な直方体（２つの頂点が(x, y, z)と$(x + dx, y + dy, z + dz)$）について，電流はx軸に垂直な２つの面（面積=$dydz$）dS_xとdS_{x+dx}から出入りするだけである：

$$流出する正味の電流 = -j_x(x)dS_x + j_x(x + dx)dS_{x+dx} = \big(j_x(x + dx) - j_x(x)\big)dydz = \frac{dj_x}{dx}\, dxdydz = \frac{dj_x}{dx}\, dV$$

【3 次元の電流】

電流密度が各所で向きと大きさを変える：

$$\vec{j} = (j_x, j_y, j_z),\quad j_x(x, y, z),\ j_y(x, y, z),\ j_z(x, y, z)$$

先とおなじ直方体の面dS_xとdS_{x+dx}から流出する正味の電流は$\big(j_x(x + dx, y, z) - j_x(x, y, z)\big)dydz$ である．なぜなら電流密度ベクトルの y あるいは z 成分は面dS_xとdS_{x+dx}を通過しないからである．他の面dS_yとdS_zなどについても同様に考え，全電流はすべての面についての合計となるので，

$$流出する正味の電流 = \frac{\partial j_x}{\partial x}\, dV + \frac{\partial j_y}{\partial y}\, dV + \frac{\partial j_z}{\partial z}\, dV$$

を得る．結局，ある点で電流の湧き出しの量を計算するには$\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)$を求める．この量が正ならば湧き出し，負なら吸い込みがある．0 ならば流れが通過するだけである．

【ベクトル場$\vec{F}$からその湧き出し・吸い込みを示すスカラー場をつくる演算：$\nabla\cdot\vec{F}$】

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\text{を}\nabla\cdot\vec{F}\text{と書く}$$

微分演算子$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$をベクトルと見て，$\nabla$と$\vec{F}$の内積をつくる演算を$\nabla\cdot\vec{F}$と表したのである．「ナブラ　ドット　エフ」と呼ぶ．$\nabla\cdot\vec{F}$は$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{F}}$とも書き，「ダイバージェンス　エフ」あるいは「$\vec{F}$の発散」とも言う．

【電場のダイバージェンス：$\nabla\cdot\vec{E}$，$\mathrm{div}\,\vec{E}$】

ある点に置ける

$$\nabla\cdot\vec{E}=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

の値に，その点を含む微小な体積$dV=dxdydz$をかけると

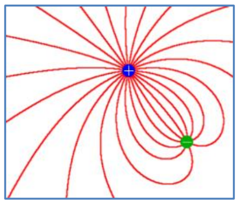
$$\nabla\cdot\vec{E}\,dV=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dxdydz=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}dx\times dydz+\frac{\partial E_y}{\partial y}dy\times dzdx+\frac{\partial E_z}{\partial z}dz\times dxdy\right)$$

$$=\{E_x(x+dx,y,z)dS_x-E_x(x,y,z)dS_x\}+\{E_y(x,y+dy,z)dS_y-E_y(x,y,z)dS_y\}+\{E_z(x,y,z+dz)dS_z-E_z(x,y,z)dS_z\}$$

$$=\iint_{\mathrm{dV}\text{ の表面}}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

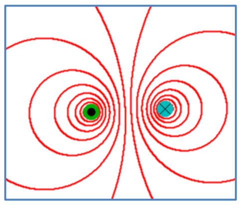
電場と電荷の関係（クーロンの法則）を表すガウスの法則から

$$\nabla\cdot\vec{E}\,dV=\iint_{\mathrm{dV}\text{ の表面}}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\mathrm{dV}}\rho\,dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho dV\quad\rightarrow\quad\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



を得る．電場が「湧き出す」ところには正の電荷密度があり，「吸い込まれる」ところには負の電荷密度がある．電場の湧き出しも吸い込みもないところには電荷が無い．電場を電気力線と読み替えると，そのイメージをつかめるだろう．電気力線は正電荷から負電荷に向かって走り，電荷の無い位置で途切れることはない（分岐することもない）．電荷によらない電場（誘導電場）では次項の磁力線と同様に電気力線は閉じたループになる．

【磁束密度のダイバージェンス：$\nabla\cdot\vec{B}$】



電荷に対応する磁荷が存在しない（磁気現象は電流による）ことを反映して

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

磁束密度を可視化した磁力線は，湧き出しや吸い込みがないので，端がない．いいかえると，磁力線は閉じたループになる．

【例】原点に点電荷があるときの電場 $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=K\frac{\vec{r}}{r^3}$，　$\vec{r}=(x,y,z)$，　$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$　について，原点を除く位置$(\vec{r}\neq 0)$で$\nabla\cdot\vec{E}$の値を計算すると，電荷がないのだから 0 になる．実際

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{x}{r^3}\right)=K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)=K\left\{x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}(x)\right\}=K\left\{x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}(x)\right\}=K\left\{x\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{1}{r^3}\right\}=K\left\{x\left(\frac{-3}{r^4}\right)\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{1}{r^3}\right\}$$

$$=K\frac{-3x^2+r^2}{r^5}$$

同様に，

$$\frac{\partial E_y}{\partial \mathrm{y}}=K\frac{-3y^2+r^2}{r^5},\qquad\frac{\partial E_z}{\partial \mathrm{z}}=K\frac{-3z^2+r^2}{r^5}$$

よって

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=K\left\{\frac{-3x^2+r^2}{r^5}+\frac{-3y^2+r^2}{r^5}+\frac{-3z^2+r^2}{r^5}\right\}=K\left\{\frac{-3(x^2+y^2+z^2)+3r^2}{r^5}\right\}=0$$

【例】z 軸にそって正方向に流れる直線電流 I の周囲の磁場$\vec{B}$は，磁力線が z 軸を中心とする xy 面内の同心円の接線方向を向き右ネジの回転方向，大きさは円の半径Rに反比例する．z 軸以外で$\nabla\cdot\vec{B}=0$となる．

点$\vec{r}=(x,y,z)$における磁場の向きを表す単位ベクトルは，$\vec{t}=\frac{1}{R}(-y,x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y,x,0)$である．なぜなら，$\vec{r}\cdot\vec{t}=0$より両者は直交し$\vec{r}$は円の半径方向を向くので$\vec{t}$は接線方向を向く．さらに xy 面内の第一象限の値を用いるとすぐ分かるように，z 軸正方向を基準とする右ネジの方向になる．$|\vec{t}|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{(-y)^2+x^2}=1$．　$\vec{t}$を用いて$\vec{B}$を表すと

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{R}\vec{t}=K\frac{1}{R}\vec{t}=K\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}=K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=K(-y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=-Ky\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^2}\right)=-Ky\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R^2}\right)\frac{\partial R}{\partial x}=-Ky\left(\frac{-2}{R^3}\right)\left(\frac{x}{R}\right)=K\frac{2xy}{R^4}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y}=K\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=Kx\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R^2}\right)=Kx\left(\frac{-2}{R^3}\right)\left(\frac{y}{R}\right)=-K\frac{2xy}{R^4}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z}=0\text{ だから，}\qquad \nabla\cdot\vec{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=K\frac{2xy}{R^4}-K\frac{2xy}{R^4}=0$$

【例】原点を中心とする半径aの球の内部で，電場の向きが半径方向外向き，原点から距離rの位置で大きさが$E(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}$のとき，球内の電荷分布は一様で$\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$である（教科書 例題 5.3）．

電場ベクトルは

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}r\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{r}=K\vec{r}$$

よって

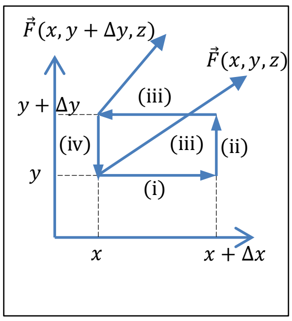
$$\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}=\varepsilon_0 K\,\nabla\cdot\vec{r}=\varepsilon_0 K\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z\right)\right\}=3\varepsilon_0 K=3\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

=========【ベクトル場$\vec{F}$の「ずれ」あるいは「回転」を表すベクトル$\nabla\times\vec{F}$を求める演算】============

スカラー場 $f(\vec{r})$からベクトル場$\vec{F}=\nabla f$を作れることを先に学んだ．だが，すべてのベクトル場をこの方法で作れるわけではない．∇fの周回積分は 0 となるが，周回積分が 0 でないベクトル場もある．たとえば，直線電流がつくる磁場を，電流を囲む周回路で積分すると 0 とはならない（ただし，この場合には電流を囲まない周回積分は 0 になる）．

【微小な長方形のまわりの周回積分】

ある点のまわりの無限に小さ周回路で周回積分を行ったときの値は，その点におけるベクトル場の「∇fとは異なる」様子を表す．幾何学的な意味を考えるのは，この計算をしてからにしよう．



(長方形の)微小な周回積分路を z 軸と垂直な面内にとることにしよう．

$$\Delta C_{xy}:(x,y,z)\underset{\text{(i)}}{\to}(x+\Delta x,y,z)\underset{\text{(ii)}}{\to}(x+\Delta x,y+\Delta y,z)\underset{\text{(iii)}}{\to}(x,y+\Delta y,z)\underset{\text{(iv)}}{\to}(x,y,z)$$

$$\oint_{\Delta C_{xy}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\text{(i)}}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\text{(ii)}}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\text{(iii)}}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\text{(iv)}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

径路(i)について考察する．径路上の微小な変位は常に x 軸方向だから$d\vec{r}=(dx,0,0)$，内積$\vec{F}\cdot d\vec{r}$は双方のx成分の積となり

$$\int_{\text{(i)}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_x^{x+\Delta x}F_x(x,y,z)dx\simeq F_x(x,y,z)\int_x^{x+\Delta x}dx=F_x(x,y,z)\Delta x$$

「$\simeq$」は，積分区間が非常に小さいことを考慮して，区間の左端の値$F_x(x,y,z)$で区間内の関数値を代表させた．区間の幅を無限小にする極限では正確な等号になる．同様に

$$\int_{(\mathrm{iii})} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x+\Delta x}^{x} F_x(x, y+\Delta y, z)dx \simeq F_x(x, y+\Delta y, z)(-\Delta x)$$

よって

$$\int_{(\mathrm{i})} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{(\mathrm{iii})} \vec{F}\cdot d\vec{r} \simeq F_x(x,y,z)\Delta x - F_x(x,y+\Delta y,z)\Delta x = -\{F_x(x,y+\Delta y,z) - F_x(x,y,z)\}\Delta x = -\{F_x(x,y+\Delta y,z) - F_x(x,y,z)\}\Delta x$$

$$= -\frac{F_x(x,y+\Delta y,z) - F_x(x,y,z)}{\Delta y}\,\Delta x\,\Delta y \simeq -\frac{\partial F_x}{\partial y}\,\Delta S_z$$

同様に

$$\int_{(\mathrm{iv})} \vec{F}\cdot d\vec{r} \simeq \frac{\partial F_y}{\partial x}\,\Delta S_z$$

総合すると

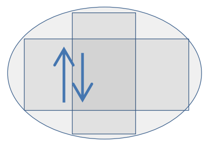
$$\oint_{\Delta C_{xy}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \simeq \left\{\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right\}\Delta S_z$$

全く同様に，x軸と垂直な面およびy軸と垂直な面のまわりの周回積分は

$$\oint_{\Delta C_{yz}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \simeq \left\{\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right\}\Delta S_x \qquad \text{および} \qquad \oint_{\Delta C_{zx}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \simeq \left\{\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right\}\Delta S_y$$

である．

(長方形でない)一般の形の周回路は，もっとずっと小さな長方形に分割すると，隣り合う長方形に共通な辺の線積分は周回の向きが逆になるため互いに打ち消しあい，最外周の線積分だけが残る．このため，z 軸に垂直な一般の形の周回路であってもその面積がΔS_zならば$\oint_{\Delta C_{xy}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \simeq \left\{\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right\}\Delta S_z$の式を変更する必要がない．



【ベクトル場の「回転」】

周回積分の値をループの面積で割った量を成分とするベクトルを$\nabla\times\vec{F}$と記し「ナブラ　クロス　エフ」と読む．

また，この量を rot$\vec{F}$と記し「ローテーション エフ」あるいは「F の回転」ともいう：

$$\nabla\times\vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z},\ \ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x},\ \ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$と$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$の成分をベクトルの外積のルールで並べたものとなることから$\nabla\times\vec{F}$という記号が用いられる．

（　２個のベクトルの外積は$\vec{E}\times\vec{F} = (E_yF_z - E_zF_y,\ \ E_zF_x - E_xF_z,\ \ E_xF_y - E_yF_x)$　）

【ストークスの定理】

任意の微小な面$\Delta\vec{S}$（面積ΔS，向き$\vec{n}$）の周囲ΔCをまわる周回積分の値は

$$\oint_{\Delta C} \vec{F}\cdot d\vec{r} \simeq (\nabla\times\vec{F})\cdot\Delta\vec{S}$$

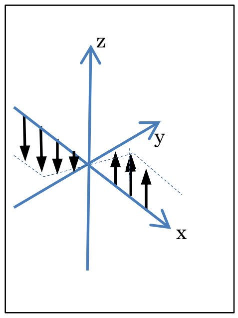
で与えられる．「$\simeq$」 面積が無限小になるとき正確な等号になる．右辺を面積分によって表すなら，無限小でなくても「$\simeq$」は正確な等号になり

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

となる（ストークスの定理）．$\oint_{\Delta C} \vec{F}\cdot d\vec{r} \simeq (\nabla\times\vec{F})\cdot\Delta\vec{S}$　は，面 S が非常に小さいので，S 上のどこでも$(\nabla\times\vec{F})$が一定と見なせるときにストークスの定理を適用したものと言うことが出来る．

【$\nabla\times\vec{F}$の意味】

$\nabla\times\vec{F}$の z 成分，$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}$ に注目する．第一項 $\frac{\partial F_y}{\partial x}$は，$x$方向に<u>だけ</u>離れた 2 点間で$F_y$が変化する割合を与える．変化を追いかける方向$(x)$と注目する量$(F_y)$が直交していることに注意すべきである．以下の例によって$\vec{F}$と$\nabla\times\vec{F}$の関係を経験する．



【例】磁束密度が

$$\vec{B}(x,y,z)=(0,0,B_0)\times f(x,y,z),\quad f(x,y,z)=f(x)=\begin{cases}1\cdots x>a\\ \frac{x}{a}\cdots |x|\le a\\ -1\cdots x<-a\end{cases}$$

であるとき，すなわち磁場はどこでも z 方向を向き，その大きさが観測点の x 座標だけにより変化する．変化のしかたは，$|x|\le a$の厚さ$2a$の層内では直線的に変わり，境界で層外と連続的につながり，層外ではどこでも一定である．この磁場の$\nabla\times\vec{\mathrm{B}}$を求める($x=\pm a$の面は，微分ができないので，計算から除外)．

$$\nabla\times\vec{B}\underbrace{=}_{\text{rot の定義}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\underbrace{=}_{\substack{\mathrm{B_z}\text{以外の成分が}\\ 0\text{ なので}}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y},\ \frac{\partial B_z}{\partial x},\ 0\right)\underbrace{=}_{\substack{\text{変数は x だけ}\\ \text{だから}}}\left(0,\ \frac{\partial B_z}{\partial x},\ 0\right)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x}=B_0\frac{\partial f}{\partial x}=B_0\frac{df}{dx}=\begin{cases}0\cdots x>a\\ \frac{B_0}{a}\cdots |x|\le a\\ 0\cdots x<-a\end{cases}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\begin{cases}(0,0,0)\\ \left(0,\frac{B_0}{a},0\right)\\ (0,0,0)\end{cases}$$

$\nabla\times\vec{B}$は層内だけで値をもち，向きは y 軸方向，大きさは一定で$\frac{B_0}{a}$となる．xz 面内のループが層内を通るときは周回積分が 0 と異なる．一見して磁場に渦が無くても$\nabla\times\vec{B}$が 0 でない場合があることに注意する．

【例】

z 軸を中心軸とする半径aの円筒内部で磁場が

$$\vec{B}_{\mathrm{in}}=\frac{B_0}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{t}=\frac{B_0}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{(-y,x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{B_0}{a}(-y,x,0)$$

円筒外部では

$$\vec{B}_{\mathrm{out}}=\frac{aB_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{t}=\frac{aB_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{(-y,x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{aB_0}{(x^2+y^2)}(-y,x,0)$$

のとき，内部と外部で$\nabla\times\vec{B}$を計算する．

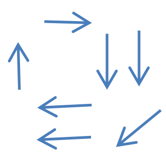
$$\nabla\times\vec{B}_{\mathrm{in}}=\left(0,\ 0,\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\frac{2B_0}{a}(0,0,1)$$

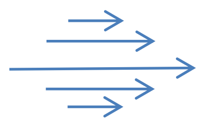
$$\nabla\times\vec{B}_{\mathrm{out}}=\left(0,\ 0,\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=0$$

円筒内部では z 方向を向く大きさ$\frac{2B_0}{a}$の均一なベクトルがあり，外部は 0 である．

外部の磁場は直線電流による磁場と同じ形であることを確認せよ．直線電流による磁場は，電流のまわりに渦をまくが，電流の位置以外では$\nabla\times\vec{B}_{\mathrm{out}}=0$に．注意せよ．

$\nabla\times\vec{B}$は，「渦」よりも「ずれ」としてイメージするほうが状況に適合することがある．





==========================【アンペールの法則と電磁誘導の法則】==========================

すでに，電場と電荷の関係を表す法則と，これに対応する磁場の性質を，ガウスの法則の微分形で表した：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

電磁気現象の法則は，これらのほかにアンペールの法則と電磁誘導の法則がある．それらの積分形は

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S} \quad \text{と} \qquad \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

である．面積分の領域Ｓを無限に小さくし，それにともないＳの周囲の周回積分Ｃも無限に小さくすると，これらは

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{と} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

となる．