9. 真空中の電磁波

基本事項

・波動として伝わる電磁場はマクスゥエル方程式を満たす，光速

・電磁波は横波．直線偏光と円偏光

・電場と磁場と進行方向は互いに直交する

・電磁波のパワー密度と電場・磁場の関係

・マクスゥエル方程式から波動方程式へ

確認

Q1. $\vec{E}(x,y,z,t) = \overrightarrow{E_0}\cos(kx-\omega t)$という電場の波について，①波の進行方向，②波長，③振動数，④振幅，⑤波の速さ(位相速度)を右辺に与えた量で書け．⑥波面（等位相面）はどのようになるか.

A1. ①ある時刻において，電場は x 軸にそって変化するコサイン波となる． x が同じなら yz 面内のどこも同じ電場である. 時刻がΔt 経過すると, コサイン波が x 軸方向にωΔ t だけずれる (進む). 波は x 方向に進む.
②波長は，ある時刻において，コサイン波の位相（コサインの引数）が2πだけ変化する距離．$kx = 2\pi \rightarrow x = \lambda = 2\pi/k$，$k$を波数という. ③振動数は, 周期 T(位相が 2π だけ変化する時間) の逆数. $\omega t = 2\pi \rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{T} = \nu = \frac{\omega}{2\pi}$. νはギリシャ文字のニュー．④振幅は電場の絶対値の最大値．$|\overrightarrow{E_0}|$　⑤　位相速度は波のある位相の点（たとえば位相$\pi/2$の点）が進む速さ，ひとつの波面（同じ位相の点，たとえば山のところをつなげた面）が進む速さ．したがって$(kx-\omega t) =$ 一定(たとえば $\pi/2$)を満たす点$x(t)$が移動する速さ. $x = \frac{\omega}{k}t +$ 定数 $\rightarrow$ 位相速度 $= \omega/k$.
⑥ どの波面も yz 平面と平行．平面波という.

Q2. $\vec{E}(x,y,z,t) = \overrightarrow{E_0}\cos(kx-\omega t)$と$\vec{B}(x,y,z,t) = \overrightarrow{B_0}\cos(kx-\omega t)$が真空中（電荷と電流がともに 0）のマクスウェル方程式を満たすとき，

① $\nabla\cdot\vec{E} = 0$と$\nabla\cdot\vec{B} = 0$から電場が横波である（進行方向に振動しない）ことを示せ.

②一般的な場合につき，真空中のマクスウェル方程式$\nabla\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$と$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$を連立し$\vec{B}$を消去せよ．$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$を用いて式を簡素化すると$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$を得ることを確認せよ.

③$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$に$\vec{E}$の具体的な関数形を代入し($E_{0y} \neq 0$ としE_yについての式をたてよ)，この波の位相速度を$\varepsilon_0\mu_0$で表せ．$\varepsilon_0 \simeq 8.9\times10^{-12}$ F/m，$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/mを用いて，電磁波の位相速度を計算せよ.

④ $E_{0y} \neq 0, E_{0z} = 0$のとき$B_{0y} = 0$（すなわち電場と磁場が直交）となることを示せ.

⑤ ④において，E_{0y}とB_{0z}の関係を求めよ.

⑥ 電磁場のエネルギー密度$u = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$に具体的な関数形を代入し$u$の時間平均（1 周期で）$< u >$を求めよ.

⑦ $\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$と$\frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$は，時間平均が等しいことを示し，エネルギー密度の時間平均を電場の振幅だけで（磁場を使わず）表せ.

⑧電磁波が光速 c で進むことから，パワー密度の時間平均<P>をエネルギー密度<u>で表せ．パワー密度が1W/cm^{2}のときの電場の振幅はどれだけか.

A1. ①　$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = -kE_{0x}\sin(kx-\omega t) = 0$，$\nabla\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = -kB_{0x}\sin(kx-\omega t) = 0$より$E_{0x} = 0$，$B_{0x} = 0$

② $\nabla\times\nabla\times\vec{E} = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} = \nabla\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow \nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

③$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \to \nabla^2 E_y - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \{-k^2 - \varepsilon_0\mu_0(-\omega^2)\}E_{0y}\cos(kx-\omega t) = 0 \to c = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

$\therefore\ c \simeq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \simeq \frac{1}{\sqrt{8.9\times10^{-12}\times4\pi\times10^{-7}}} = \frac{1}{\sqrt{89\times10^{-13}\times4\pi\times10^{-7}}} = \frac{10^{10}}{\sqrt{89\times4\pi}} \simeq \frac{10^{10}}{9.5\times2\times1.7} \simeq \frac{10^{10}}{33} \simeq 3\times10^8\ \mathrm{m/s}$

④ $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = \left(0, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = -\nabla\times\vec{E} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$

$= -\left(0, 0, \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) \to \frac{\partial B_y}{\partial t} = \omega B_{0y}\sin(kx-\omega t) = 0 \to B_{0y} = 0$

⑤ $\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \to \omega B_{0z}\sin(kx-\omega t) = kE_{0y}\sin(kx-\omega t) \to E_{0y} = \frac{\omega}{k}B_{0z} = cB_{0z}$

⑥ $u = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2 = \left\{\frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E_0}\right|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left|\vec{B_0}\right|^2\right\}\cos^2(kx-\omega t) \to \langle u\rangle = \left\{\frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E_0}\right|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left|\vec{B_0}\right|^2\right\}\times\frac{1}{2}$

⑦ $E_0 = cB_0$より，$\frac{1}{2\mu_0}\left|\vec{B_0}\right|^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2}\left|\vec{E_0}\right|^2 = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{2\mu_0}\left|\vec{E_0}\right|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E_0}\right|^2$， $\langle u\rangle = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E_0}\right|^2$

⑧ $P = c\langle u\rangle = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\varepsilon_0}{2}\left|\vec{E_0}\right|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|E_0|^2$， $E_0 = \sqrt{2P\times\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} = \sqrt{P\left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right)}\times27\ \left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)$，(c.f. 太陽光 1 kW/m². 単色ではない)

Q3. 真空中のマクスウェル方程式から，電場と磁場の各成分について波動方程式が導かれることを示せ．x方向に位相速度cで伝わる平面波f（サイン波とは限らない）がしたがう波動方程式は$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$．一般的には$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$である．

A3 すでに前問で $\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ を得た．ベクトル$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$の各成分が，一般の波動方程式にしたがうことが示された．磁場についても同様に，$\nabla\times\nabla\times\vec{B} = \nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \nabla\times\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E}) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} \to \nabla^2\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$．$x$方向に位相速度$c$で伝わる平面波の電磁波は，たとえば電場であれば$(0, E_y, E_z)$となり，$E_y(x,t)$，$E_z(x,t)$がしたがう波動方程式を考える．$\nabla^2 E_y = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$だから$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$の y 成分は$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$にしたがう．他の成分，磁場の各成分も同じ．

波動方程式は線型だから，異なる解の重ね合わせもまた解となる．異なる周波数のサイン波やコサイン波を重ね合わせると様々な周期関数を表現できる（フーリエ級数，フーリエ変換）ので，電磁波の任意の波形をサイン波とコサイン波に分解して考えることができる．