9．真空中の電磁波

基本事項

・波動として伝わる電磁場はマクスゥエル方程式を満たす，光速
・電磁波は横波．直線偏光と円偏光
・電場と磁場と進行方向は互いに直交する
・電磁波のパワー密度と電場・磁場の関係
・マクスゥエル方程式から波動方程式へ

確認

Q1. $\vec{E}(x,y,z,t)=\overrightarrow{E_0}\cos(kx-\omega t)$という電場の波について，①波の進行方向，②波長，③振動数，④振幅，⑤波の速さ(位相速度)を右辺に与えた量で書け．⑥波面（等位相面）はどのようになるか.

Q2. $\vec{E}(x,y,z,t)=\overrightarrow{E_0}\cos(kx-\omega t)$と$\vec{B}(x,y,z,t)=\overrightarrow{B_0}\cos(kx-\omega t)$が真空中（電荷と電流がともに 0）のマクスウェル方程式を満たすとき，

① $\nabla\cdot\vec{E}=0$と$\nabla\cdot\vec{B}=0$から電場が横波である（進行方向に振動しない）ことを示せ.

②一般的な場合につき，真空中のマクスウェル方程式$\nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$と$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$を連立し$\vec{B}$を消去せよ．$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$を用いて式を簡素化すると$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$を得ることを確認せよ.

③$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$に$\vec{E}$の具体的な関数形を代入し($E_{0y}\neq 0$ としE_yについての式をたてよ)，この波の位相速度を$\varepsilon_0\mu_0$で表せ．$\varepsilon_0\simeq 8.9\times10^{-12}$ F/m, $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/mを用いて，電磁波の位相速度を計算せよ.

④ $E_{0y}\neq 0, E_{0z}=0$のとき$B_{0y}=0$（すなわち電場と磁場が直交）となることを示せ.

⑤ ④において，E_{0y}とB_{0z}の関係を求めよ.

⑥ 電磁場のエネルギー密度$u=\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2+\frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$に具体的な関数形を代入し$u$の時間平均（１周期で）$<u>$を求めよ.

⑦ $\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$と$\frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$は，時間平均が等しいことを示し，エネルギー密度の時間平均を電場の振幅だけで（磁場を使わず）表せ.

⑧電磁波が光速 c で進むことから，パワー密度の時間平均<P>をエネルギー密度<u>で表せ．パワー密度が1W/cm^{2}のときの電場の振幅はどれだけか.

Q3. 真空中のマクスウェル方程式から，電場と磁場の各成分について波動方程式が導かれることを示せ．x方向に位相速度cで伝わる平面波f（サイン波とは限らない）がしたがう波動方程式は$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$. 一般的には$\nabla^2 f-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$である.