１．人間の発熱は約 100W (1 W =1 J/s)である．以下の問に有効数字 2 桁で答えよ．

① 人体から 1 分間に放出される熱エネルギーΔQはどれだけか．

[答]

$$\Delta Q = 100\ \mathrm{W} \times 60\ \mathrm{s} = 6.0 \times 10^3\ \mathrm{J}$$

② この熱が外気に触れている皮膚から逃げ出すものとし，その皮膚の温度を 33℃，外気温を 27℃とする．1 分間で外界はどれだけのエントロピーの変化があるか．ヒント：$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$.

[答]

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{6.0 \times 10^3\ \mathrm{J}}{(273 + 27)\ \mathrm{K}} = \frac{6.0 \times 10^3}{3.0 \times 10^2}\ \mathrm{J/K} = 20\ \mathrm{J/K}$$

③ 1 分間の間，息もせず，何も食べず，トイレにも行かないとする（物質の流入出がない）．この間に人体のマクロ状態（体温，体重，体積など）は（熱を奪われたのに）変化しなかった．この 1 分間の人体のエントロピーの変化について考察せよ．

[答]

状態量であるエントロピーは変化していない．

体内の化学反応で熱が発生してエントロピーが生じ，体表面から失われたエントロピーを補っている．逆に考えると，人体内部で生体機能を維持するために様々な化学反応が進んでいてそれに伴うエントロピーの増加がある．そのままだと人体の状態を一定に維持できないので，外気温より高い体温をつくりだして余分なエントロピーを体外に放出している．人間は，運動をせずにエネルギー消費を減らしても，エントロピーを一定に保つための体温維持が必要となり，食事をしないわけにはいかない．

2．ある原子は 2 準位系（2 つのエネルギー状態しかない）である：下のエネルギー準位のエネルギーが0，上のエネルギー準位のエネルギーがε．この原子N個（一定とする）からなる物体の内部エネルギーが$E(r) = r\varepsilon$となるミクロな配置の数を$W(r)$と書く．

① $W(r)$をNとrで表せ．

[答]

$$W(r) = \frac{N!}{r!\,(N-r)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots (r-1) \cdot r}$$

② 内部エネルギーがどのような値のときに$W(r)$が最大となるか, その内部エネルギーEをNとεで表せ. ただし, Nは非常に大きく$N \simeq N \pm 1$が成り立つとしてよい．

[答]

$$E = \frac{N}{2}\varepsilon$$

③ (②とは無関係に)上準位の分布rがmだけ変化して$r + m$となったとき次の問いに答えよ．

(i) 内部エネルギーの変化 ΔEをmを用いて表せ．

[答]

$$\Delta E = \varepsilon m$$

(ii) $m \ll r < N$のとき，$\Delta \log W \equiv \log W(r+m) - \log W(r)$を計算し，上準位にある原子の数$N_u = r$と下準位にある原子の数$N_\ell = N - r$の比の対数　$m \log \frac{N_\ell}{N_u}$　を用いて$\Delta \log W$を表せ.

ヒント：$m \ll r$という条件から$(r+m)(r+m-1)\cdots(r+1) \simeq r^m$，$m \ll N$からも同様.

[答]

$$\Delta \log W = \log \frac{W(r+m)}{W(r)} = \log \frac{r!\,(N-r)!}{(r+m)!\,(N-r-m)!} = \log \frac{(N-r)(N-r-1)\cdots(N-r-m+1)}{(r+m)(r+m-1)\cdots(r+1)} \simeq \log \frac{(N-r)^m}{r^m}$$

$$= m \log \frac{N-r}{r} = m \log \frac{N_\ell}{N_u}$$

(iii) この物体が温度Tで熱エネルギーΔEを吸収した．上の各小問の解答を用い，エントロピーのマクロ的な定義$\Delta S = \frac{\Delta E}{T}$とミクロ的な定義$\Delta S = k\,\Delta \log W$を連立して，$\frac{N_u}{N_\ell} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$という関係を導け．ここで$k$はボルツマン定数である.

[答]

$$\Delta S = \frac{\Delta E}{T} \quad \rightarrow \quad k\,m \log \frac{N_\ell}{N_u} = \frac{m\varepsilon}{T} \quad \rightarrow \quad \frac{N_\ell}{N_u} = e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \quad \rightarrow \quad \frac{N_u}{N_\ell} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$