三角関数の基本について

1. $\sin t$の周期は？ 周期がTのサイン関数の式は？

2. 1 秒にν回振動するサイン関数の式は？（νはギリシャ文字のニュー）

3. $x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$のグラフを描け． ただし横軸を t/T の値で刻め．

4. 次の関係を確認せよ: $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$、$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$

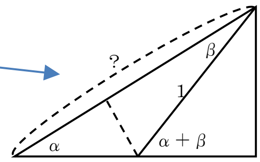
5. 任意の正整数nについて次の関係を確認せよ:

1) $\sin n\pi = 0,\quad \cos n\pi = (-1)^n,\quad \cos n\pi - 1 = \begin{cases} 0 \cdots \text{n: 偶数} \\ -2 \cdots \text{n: 奇数} \end{cases}$

2) $\sin(4n-3)\frac{\pi}{2} = 1,\quad \cos(4n-3)\frac{\pi}{2} = 0,\quad \sin(4n-1)\frac{\pi}{2} = -1,\quad \cos(4n-1)\frac{\pi}{2} = 0$

3) $\sin(4n-1)\frac{\pi}{2} = -1,\quad \cos(4n-1)\frac{\pi}{2} = 0$

6. 加法定理 $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$ を表す右図を解説せよ



7. 上の加法定理から$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$を導け． ヒント：$\cos\theta = \sin(\theta + ?)$

8. 加法定理から次の関係式を導け

1) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$

2) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\}$

3) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\}$

9. 応用問題

1) $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$ を確かめよ。 $\sin^2 \mathrm{t}$ のグラフは？ 周期は？

2) $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$ を確かめよ。 $\cos^2 \mathrm{t}$ のグラフは？ 周期は？

3) $\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin \mathrm{t} - \frac{1}{4}\sin 3\mathrm{t}$を確かめよ。 $\cos^3 t$は？

10. 次の積分を確かめよ

1) $\int_0^{2\pi}\sin \mathrm{t}\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi}\cos \mathrm{t}\,\mathrm{dt} = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin \mathrm{t}\,\mathrm{dt} = \int_{-\pi}^{\pi}\cos \mathrm{t}\,\mathrm{dt} = 0$

2) 任意の整数 n に対し$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt = \int_0^{2\pi}\sin nt\,dt = 0$

3) 任意の整数 n, m に対し$\int_0^{2\pi}\sin nt\cdot\cos mt\,\mathrm{dt} = 0$

4) <u>整数</u> n, m に対し$\int_0^{2\pi}\sin nt\cdot\sin mt\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi}\cos nt\cdot\cos mt\,\mathrm{dt} = \pi\,\delta_{mn}$，ただし$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 \cdots m = n \\ 0 \cdots m \neq n \end{cases}$

13. 角振動数$\omega = 2\pi/\mathrm{T}$ のサイン・コサインについて次の積分を確かめよ

$$\int_0^{\mathrm{T}}\begin{cases}\sin n\omega t\cdot\sin m\omega \mathrm{t} \\ \cos n\omega t\cdot\cos m\omega \mathrm{t}\end{cases}\mathrm{dt} = \frac{\pi}{\omega}\delta_{mn} = \frac{\mathrm{T}}{2}\delta_{mn},\qquad \int_0^{\mathrm{T}}\sin n\omega t\cdot\cos m\omega t\ \mathrm{dt} = 0$$

B. 周期関数の一般的な特性に慣れる

14. 周期現象の例を挙げよ．

15. 周期 Tのとき、nT（n 整数）も周期となることを示せ．

16. 周期 Tの関数$f(t)$について$\int_a^{a+T}f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$（$a$は任意）となることを示せ．

17. 周期Tの周期関数$f(t)$は任意の t について$f(t) = f(t+T)$を満たす． 周期$S(\neq T)$の関数gで$g(t) = g(t+T)$ならTとS の関係は？

C. 「サイン・コサインの重ね合わせ」を考察する

18. ①原点 O を中心とする半径 1 の円の上を等速円運動する点の時刻 t における座標を角速度$\omega = 2\pi/\mathrm{T}$を用いて書け（T は周期，すなわち 1 回転に要する時間）．ただし t=0 で x 軸となす角を ϕ とする．

②等速円運動を横から見ると（たとえば座標軸に射影してみると）サイン関数，コサイン関数であらわされる（単振動）ことを確認せよ．

19. 問 18 で初期位相が$\phi = 0, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$の点$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_-, \mathrm{P}_+$の時刻 t における座標を π を<u>用いずに</u>表せ．

20. ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OP_-}}$（あるいは$\overrightarrow{\mathrm{OP_+}}$）の和で任意のベクトル（振幅，初期位相）を作ることができる．その理由は？

21. $\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OP_-}}$ の大きさAと向き（初期位相ϕ）をα，βで表せ．$\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OP_+}}$でも試みよ．

22. $f_0(t) = \cos\omega t$のグラフを横にシフトして$f_\phi(t) = \cos(\omega t + \phi)$とし，サインとコサインの重ね合わせで表した：$f_\phi(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ のa, bを定めよ．シフトの量ϕを大きくするときa, bはどのように変わるか.

23. $\sin\omega t + \sin(2\omega t) + \cos(3\omega t)$の周期は？問 17 参照.

24. $\frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega t + a_2\cos(2\omega t) + \cdots b_1\sin\omega t + b_2\sin(2\omega t) + \cdots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\}$，　$\omega = 2\pi/T$
の周期は？

D. フーリエ級数にかかわる用語に慣れる（読み物）

周期現象を表す関数$f(t)$の<u>フーリエ級数とは</u>

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t\}$$

の右辺のことである。

「≃」と書いた理由は，左辺と右辺がどのようなｔの時にもぴったり一致するという保障がないからである。また総和記号が無限の項の和を要求している理由は，$f(t)$が「有限個の三角関数，それも角振動数ωの整数倍の振動数をもつもの<u>だけ</u>」ならば有限の項で書ける（あたりまえ！！）のだが，そうでない関数だと有限個で書けるわけがない。

「$f(t)$を<u>**フーリエ展開する**</u>」とは「$f(t)$のフーリエ級数を求める」ことである。「$f(t)$のフーリエ展開」とは「$f(t)$のフーリエ級数」のことである。

問 24 で調べたように，フーリエ級数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t\}$ は（定数項 $\frac{a_0}{2}$を除き）一番低い角振動数すなわち<u>**基本振動数**</u>がω(一番長い周期が$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$)，他の振動数はすべてωの整数倍　(他の周期はすべて T の整数分の 1)　となる．このフーリエ級数は周期 T の周期関数である．

<u>**定数項**</u>のグラフ上の意味：どんな値をベースライン（場合によっては振動の中心，あるいはベースライン）として周期的な振動がおきるかを示す。

$n = 1$の項のグラフ上の意味：

$$a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\left\{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\cos\omega t + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\sin\omega t\right\} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sin(\omega t + \phi_1)\text{，ただし }\tan\phi_1 = \frac{a_1}{b_1}$$

と変形すれば，n=1 のサインとコサインのペアは，その係数a_1とb_1を適切に選べば，任意の振幅$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$，任意の初期位相をもつ振動数ωのサイン関数を表現できる。問 20 近辺を参照.

<u>**高調波**</u>：同じ高さの音でも，さまざまな楽器の音色が異なる。$n = 1$（基本振動数)に加えて，$n = 2, n = 3, \cdots$の高い振動数がどの程度含まれるかで異なる音色に聞こえる。$n = 2$の波を２倍波（第２高調波）と呼ぶ。以下，３倍波あるいは第３高調波，・・・

フーリエ級数は，高調波がどんな割合で含まれているかという情報に加えて，各高調波の初期位相（言い換えると，それぞれの高調波の間の位相の関係）という情報を保っている。これらの情報がそろうと，基本周波数ωをもつ波の形（信号波形）が決まる。

フーリエ係数：フーリエ級数に現れる係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots$を<u>**フーリエ係数**</u>という。フーリエ係数を全部決めれば，フーリエ級数が完全に決まる。

周期関数$f(t)$がフーリエ級数に<u>展開できるなら</u>，フーリエ係数を$f(t)$から算出することができる。関数が区分的に連続なとき（とびとびに跳びがあるとき)，フーリエ級数はその位置で関数値を正確に再現できないが，それ以外の位置では関数値を再現できる。したがって，フーリエ係数の組を指定することと，周期関数を定義することとは同等である。無限個ある係数をすべて与えなくても，関数の様子をかなり再現できるときは，時間軸上で変動する周期関数を僅かな数の係数の組で表すことができるのである。