課題　No. 1

一般的な話題

Q. $F(t)|_a^b$ と$[F(t)]_a^b$は区別して使うのですか．

A. 同じです：$F(t)=\int f(t)dt$ （$F(t)$が$f(t)$の原始関数）のとき，$F(b)-F(a)$を表します．なお「変数のところに定数や別の変数名を代入したもの」を$f(x)|_{x=a}$や$f(x)|_{x=y}$のように書いたりもします．

Q.「積分定数を C とすると」と書く必要がありますか．

A. 行儀が一番良いのは「積分定数を C として$\int\cdots\mathrm{dt}=\cdots+\mathrm{C}$」，つぎに行儀が良いのは「$\int\cdots\mathrm{dt}=\cdots+\mathrm{C}$」，行儀が悪いのは「積分定数を省略して$\int\cdots\mathrm{dt}=\cdots$」．　時と場合により使い分けてください．

Q.積分定数はいつも C と書くのですか．

A. そうでもありません．

C は英語の constant の頭文字．場合によると K と書くこともありますが，こちらはドイツ語の Konstante から．

数学では定数をアルファベットの先からa,b,c（およびその大文字）などで表し，変数を後ろからx,y,z（およびその大文字）で表すのがデカルト以来の伝統です．その他の文字については，d は微分記号，e は自然対数の底，f,g,h は関数記号，i と j は純虚数また i,j,k,l,m,n は整数変数，o は 0 と紛らわしいので敬遠，p,q,r は有理数，s,t は変数，t は時間をイメージする変数，u,v,w は速度をイメージする関数など．

Q.部分分数展開などの未定の定数を A,B,C などと置いたとき，積分定数を C と書いてもいいですか．

A. もし積分結果を表す式に未定定数の C が残っていなければ，よもや見誤りはないだろうから，積分定数を C と書いてもかまわないだろうと思います．でも，気持ちが悪ければ

$$\int\cdots\mathrm{dt}=\cdots+\text{定数}$$

とでも書けば良いのでは？

Q.部分分数とは何ですか．

A. 分母と分子が多項式の関数（有理関数）について，分母を因数分解し，その因子（およびそのべき乗）だけを分母とする分数関数の和をつくって，もとの関数を表したものです．普通は，先に式の割り算をして，分子の次数を分母より下げておきます．たとえば，$\frac{f(\mathrm{x})}{(x-a)(x-b)^2(x^2+cx+d)}=\frac{\mathrm{A}}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}+\frac{B'x+B''}{(x-b)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+cx+d)}$の右辺が「左辺の部分分数」．右辺を作る作業が部分分数分解です．右辺の分子は，どれも分母より次数が下がっていることに注意．

Q. 具体的な関数が与えられたときの部分積分で，どの部分を$\int f(x)g'(x)dx$のfとg'にすればよいか分かりません．

A. 基本の関数の導関数を熟知していることが前提ですが，あとは練習（先人の経験を盗む）です．　勘は修練のたまもの．とはいえ，基本と成る考えは次のとおり：$\int f(x)g'(x)dx=fg-\int f'(x)g(x)dx$の右辺の積分ができないと部分積分にした意味がないのですから，f'がfより（積分するときに）簡単な形になり，g'がgになってもそれほど複雑にはならないというのが，一つの狙い目です．あるいは，$\int f'(x)g(x)dx$が$\int f(x)g'(x)dx$と同じ形で係数が異なる場合も有り難いですね．

Q. arc がつくと分からなくなります．

A. 逆三角関数については教科書 2 章で，その微分係数については 3 章で学びましたから，各自で復習しておいてください．そのうえで積分の勉強をしてください．

問題 4-1 {1}(2)　$\int\frac{(x+1)^3}{x^3}dx$

Q. 部分積分を試みましたが，解き方がわかりませんでした．

A. そういうときは，別の方法を試みましょう！

積分（微分するとそうなる元の関数を求める）では，ある方法が使えても別の方法が使えないことはよくあります．ただし，絶対に初等関数（教科書 2 章に出てくる関数たち）では表せないこともあります．

Q. 分子を因数分解したのですが部分分数分解のとき何を未定定数とおけばよいか分かりません．

A. $\frac{(x+1)^3}{x^3}$を単純な分数の和に分解したいのなら，そのまま展開して

$$\frac{(x+1)^3}{x^3}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3},\qquad \frac{(x+1)^3}{x^3}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3=1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$

とすればよいのです．これをわざわざ部分分数分解という人は少ないと思います．

この展開を使って積分計算すると

$$\int\frac{(x+1)^3}{x^3}dx=\int\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=x+3\ln|x|-\frac{3}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$$

問題 4-1 {1} (3)　$\int(1+x)\sqrt{x}dx$

Q. 置換積分で計算するのでしょうか．

A. そう思ったら，もう一歩先に進めて，何をどう置換するのかを考えましょう．たとえば$x=t^2$とすると$dx=2tdt$なので

$$\int(1+x)\sqrt{x}dx=\int(1+t^2)t\times 2tdt=2\int(t^2+t^4)dt=2\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$

となります．しかし，そのまま展開したほうが手間は少ないと思います：

$$\int(1+x)\sqrt{x}dx=\int\left(x^{1/2}+x^{3/2}\right)dx=\frac{1}{1+1/2}x^{1+1/2}+\frac{1}{1+3/2}x^{1+3/2}+C=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+C$$

例題 4.2 (1)　$\int(ax+b)^n dx$

Q. なぜ$n=-1$と$n\neq-1$の場合だけを考えるのですか（n=1 は考えなくて良いのですか）．

A. 問題には書いてありませんが，文字の使い方から題意は「nが任意の整数の場合」でしょう（得られる結果は任意の実数でも成り立つ関係です）．まず，$n=-1$と$n\neq-1$ですべての場合を尽くします．$n=-1$を特別扱いするのは，このときだけ積分結果が対数関数となるからです（他の場合はべき関数になります）．n=1 を特別扱いしたい理由は思い浮かびません．

Q. $dx=\frac{1}{a}dt$となるのが分かりません．

A. まず，質問の形に不満があります．「$t=ax+b$とおくと，$dx=\frac{1}{a}dt$と書いてありますが，自分では＊＊＊だと思います．実際にこれを試してみたら＊＊＊．どこで違ってしまったのでしょうか.」となれば，満足なのです．もっとも，このように質問できるときは，きっと自分で答えを見つけるのも簡単でしょう．

さて，$t=t(x)=ax+b$においてxが微小な量dxだけ変化するときのtの変化（すなわちtの微分）は，

$$dt=t(x+dx)-t(x)=\{a\times(x+dx)+b\}-\{ax+b\}=a\,dx$$

これより$dt=adx$となります．この式の両辺を$1/a$倍すれば$dx=\frac{1}{a}dt$となります．

例題 4.2 (3)　$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Q. なぜそのように置換するのか分かりません．

A. なぜ教科書に出ている置換が必然的なの，講義で説明したのですが，理解してもらえたでしょうか．

Q.この置換は公式ですか？いつこの置換を使うのですか？$\int\frac{dx}{\sqrt{\text{任意の関数}}}$はいつでも$t=x+\sqrt{\quad}$とするのですか？

A. この積分に対して，この置換は定石です（公式とは言わないです）．でも，この定石を知らなくても計算できることは講義で学んだとおりです．

つぎに，$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t}$となることから，$\int \{ \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+a^2}} + h(x) \} dx = \int \frac{g(t)}{t} dt + \int h(x) dx$となってくれる$f(x)$のときには適用できそうですね．

最後に，$\int \frac{dx}{\sqrt{\text{任意の関数}}}$にはこの置換は一般には使えません．うまく行かない例はたくさん思い浮かべることができるでしょう．

Q. $\sqrt{x^2+a^2} = t$とおいたのでは，だめでしょうか？

A. そう思ったら試してみましょう．でも，うまく行かないでしょうね！積分法は経験がものをいう計算方であり，先人の経験をつたえてくれるのが教科書なのです．

Q. $x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{a^2}{t}\right)$から$\sqrt{x^2+a^2} = t - \frac{t^2-a^2}{2t}$が出てきません．

A. $t = x + \sqrt{x^2+a^2}$から$\sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \frac{1}{2}\left(t - \frac{a^2}{t}\right) = t - \frac{t^2-a^2}{2t}$

Q. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int (x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -2(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} + C$としたのですが，どこがおかしいのでしょうか．

A. 誤りであることは，右辺を微分してみればすぐにわかりますね．$r \neq -1$ なら$\frac{d}{dx}(x^2+1)^r = r(x^2+1)^{r-1} \times \frac{d}{dx}(x^2+1)$の右辺第 2 因子をわすれないでください．

Q. xに$\frac{1}{2}\left(t - \frac{a^2}{t}\right)$を代入するのではだめですか？

A. dx を dt に変換することも忘れないでください．

例題 4-4 $\frac{x+1}{x^3+x^2-2x} = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{x-1} + \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{x+2}$

Q. このように分解できる理由は何でしょうか．

A. 分母の多項式が因数分解できるからです．したがってn次多項式が複素数・重解まで含めてn個の解をもつのがその理由です．任意の有理式（多項式の比の形の分数式）が部分分数分解できることは講義用の WebPage に参考資料として証明が掲載してあります．

Q. 定数の求め方が分からりません．

A. 通分して比較すれば必ず求めることができます．微分法を使うやりかたもあります．下記ページの後半部分に注目：
http://next1.cc.it-hiroshima.ac.jp/MULTIMEDIA/calcmulti/node46.html

Q. 部分分数を使わないやりかたがありますか．

A. 私は知りません．

問題 4-2 {1}(2) $\int x^2(x^3+2)^4 dx$

Q. $t = x^3+2$とおいたらx^2はどうなりますか．

A. $x^3 = t-2$だから，両辺を 2/3 乗して，$(x^3)^{\frac{2}{3}} = x^2 = (t-2)^{\frac{2}{3}}$ です．dxもtで表すことを忘れずに．でも，なんだか面倒な計算が続きそうですね．実は，この積分では$\int x^2(x^3+2)^4 dx = \int (x^3+2)^4 x^2 dx$として

$$x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) = \frac{1}{3} d(x^3+2) = \frac{1}{3} dt$$

を見抜くことが大切です．そうすると

$$\int x^2(x^3+2)^4dx = \frac{1}{3}\int t^4dt = \frac{1}{3}\times\frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{15}(x^3+2)^5 + C$$

変数をxからtに置換したとき，dtがどうなるかを考えるのが積分法の基本です．

問題 4-2 {1}(4) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$

Q. $t=\sin x$とおくと$\cos x = t'$としてから計算するのですか．

A. そうです．実際，$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int t^2 t' dx = \int t^2 \frac{dt}{dx} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x + \mathrm{C}$ です．

慣れてきたら，$\mathrm{d}(\sin x) = \frac{\mathrm{d}\sin x}{dx}dx = \cos x\, dx$と見て $\int \sin^2 x\ \mathrm{d}(\sin x) = \int \mathrm{t}^2\, dt$ のように反応できると早いですね．

問題 4-2 {1}(5) $\int x\sqrt{1-2x^2}\, dx$

Q. 展開した方が簡単と思いますが・・・

A. $\sqrt{\ }$を展開するとは？うむ，できないことはないが高級な話です！

教科書 p.67 にあるマクローリン展開：$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\mathrm{x}^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \cdots$ $(|x|<1)$を使うと，

$\sqrt{1-2x^2}$の定義域は$1 > 2x^2$なので，定義域内では

$$\sqrt{1-2x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-2x^2)^n$$

と展開できます，この和をとってから積分したものと，各項を積分してから和をとったものが同じなら（無限項の和だから保証はできない）

$$\int x\sqrt{1-2x^2}\, dx = \int\left(x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-2)^n x^{2n+1}\right)dx = \int x dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-2)^n \int x^{2n+1}dx$$

右辺はべき関数の積分だから・・・計算した結果を何のマクローリン展開か考えて・・・

この計算は，普通のとおり置換積分を使うと簡単に仕上がります：

$$\int x\sqrt{1-2x^2}\, dx = \int \sqrt{1-2x^2}\ \boxed{xdx} = \int \sqrt{1-2x^2}\ \boxed{\frac{1}{2}d(x^2)} = \int \sqrt{1-\boxed{2x^2}}\ \frac{1}{4}d\left(\boxed{2x^2}\right) = \frac{1}{4}\int \sqrt{1-t}\ dt = \frac{1}{4}\int \sqrt{s}\ d(1-s)$$

$$= -\frac{1}{4}\int \sqrt{s}\ ds = -\frac{1}{4}\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6}s^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6}(1-t)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

問題 4-2 {1}(6) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

Q. $t = x/a$と置く発想はどうしたら出てくるのでしょう．

A. 積分は，知っている基本的な積分にどうやったらたどり着けるかで勝負が決まります．この場合は，$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$を知らないと，スタートラインには並べません．$\arctan x$については教科書 2 章で，その微分係数については 3 章で学びましたから，復習しておいてください．さて，$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$を思い出せば，この問の積分は非常に似ていることに気づくでしょう．そうすると，分母のa^2を 1 にできるかと考えることになります．積分記号の中身だけ見ていくと

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{\mathrm{d}x}{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)} = \frac{a\times d\left(\frac{x}{a}\right)}{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{a\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)} = \frac{dt}{a(t^2+1)} = \frac{1}{a}\frac{dt}{(t^2+1)}$$

つまり $t = x/a$とおいたわけです．

問題 4-2 {2} (4) $\int \log(x^2+4)dx$

Q. $\int \frac{2x^2}{x^2+4}dx$の計算がわかりません．

A. せっかくなので，最初から計算を追ってみましょう．

まず

$$\int \log(x^2+4)dx = \int 1\cdot\log(x^2+4)dx = \int x'\log(x^2+4)dx = x\log(x^2+4) - \int x\frac{d}{dx}\log(x^2+4)\,dx$$

ですが，基本の部分積分なので説明不要でしょう．最右辺の第二項の計算ができなければ，この部分積分は無意味になりますが少しがんばってみましょう．

$$\int x\frac{d}{dx}\log(x^2+4)\,dx = \int x\frac{\frac{d(x^2+4)}{dx}}{x^2+4}dx = \int x\frac{2x}{x^2+4}dx = \int \frac{2x^2}{x^2+4}dx = 2\times\int\frac{x^2}{x^2+4}dx$$

この最右辺をさらに簡単にします．

$$\int\frac{x^2}{x^2+4}dx = \int\frac{x^2}{x^2+4}dx = \int\frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx = \int\frac{x^2+4}{x^2+4}dx - \int\frac{4}{x^2+4}dx = x - 4\int\frac{dx}{x^2+2^2} = x - 4\times\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} = x - 2\arctan\frac{x}{2}$$

総合すると

$$\int\log(x^2+4)\,dx = x\log(x^2+4) - 2\times\left(x - 2\arctan\frac{x}{2}\right) = x\log(x^2+4) - 2x + 4\arctan\frac{x}{2} + C$$

となります．arctan がわからないとできませんね（問題 4-2{1}(6)や冒頭のガイドを見てください）．

Q. $t=\frac{x}{2}$とおいて積分すると$+4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$のかわりに$-4\arctan\left(\frac{2}{x}\right)$となってしまいました．

A. これは教訓的な話題です．質問ありがとう！

この答えは正解なのです．$\arctan z$は tan の値が $z=\frac{高さ}{底辺}$ になる角度のことですから，$\arctan 1/z$ は tan の値が$\frac{底辺}{高さ}$となる角度です．これからただちに，$\arctan z + \mathrm{arcnta}\,\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$です．したがって$\arctan\left(\frac{2}{x}\right) = -\arctan\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$．右辺の$\frac{\pi}{2}$は定数なので積分定数に含めることができ，$\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$のかわりに$-\arctan\left(\frac{2}{x}\right)$を使っても同じ原始関数を表します．

教訓は逆三角関数を単なる記号として見るのではなく，直角三角形の形と対比しながら観察すべきこと．もうひとつは，積分の方法が異なると定数の値が違うので異なる関数と思えたとしても，積分定数が差を吸収してくれること．

問題 4-2 {2} (5) $\int x^2e^xdx$

Q. WebPage にある $\int xe^xdx$の計算結果は部分積分で求めたのですか？

A. そのとおりです．

問題 4-2 {2} (6) $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Q.途中の計算を詳しく知りたいです．

A. まず教科書略解

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad\to\quad \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int\frac{dx}{x^2+1} - \int\frac{x}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\int\frac{dx}{x^2+1} = \arctan x,$$

$$\int\frac{x}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{x}{2}\times\frac{d}{dx}\frac{-1}{(x^2+1)}dx=\frac{x}{2}\times\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)-\int\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x}{2}\times\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}\arctan x$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\arctan x-\left(\frac{x}{2}\times\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}\arctan x\right)=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)}+\mathrm{C}$$

別解： $x=\tan\theta$とおくと$x^2+1=\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$, $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$. 逆三角関数を使う準備をする：

$$\theta=\arctan x,\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\ \cos\theta=\frac{2x}{1+x^2}$$

そこで

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\cos^4\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int\cos^2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+\mathrm{C}$$

問題 4-2 {3} (4) $\int\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2}dx$

Q. 同じ積分が{2}(6)にあるので「{2}(6)より」とだけ書いてもいいですか.

A. このレポートとしては，それで十分です.

Q. 被積分関数を分解する手続きを説明してください.

A. 分母の形を見ながら，分子を変形して，できるだけ簡単な分数にします：

$$\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2+1)+2}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2+1}+\frac{2}{(x^2+1)^2}$$

Q. どういう場合に$\frac{A}{(x^2+1)}+\frac{B}{(x^2+1)^2}$と分解できるのですか.

A. $\frac{A}{(x^2+1)}+\frac{B}{(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)+B}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax^2+(A+B)}{(x^2+1)^2}$と計算し最右辺の分子を観察すると（分母が 4 次式であるにもかかわらず）分子が 2 次式でしかも 1 次の項が無い場合に限られることが分かります.

Q. 結果的に分母に同じ関数が出るのに，うまく積分できるのはなぜ・・・

A. 分母が同じでも分子が違うと積分ができる場合があります．別のことですが，計算したい積分と同じものが（異なる符号や係数の値）出てきても，他の項が計算できるものなら，移行して計算が完了するスタイルもよくあります.

問題 4-2 {4}　$\sin x$と$\cos x$の有理関数 $f(\sin x,\cos x)$

Q. $\sin x$と $\cos x$の有理関数 $f(\sin x,\cos x)$とは何ですか.

A. まず「zの有理関数」とは，$\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0}$のように，z の多項式の比で表される分数関数です．次に「uとvの多項式」とは，$\mathrm{A}_{nm}u^nv^m$という形の項の和で表される関数です．そして，「uとvの有理関数$f(u,v)$」とは「uとvの多項式」の比で表される関数です．結局，「$\sin x$と $\cos x$の有理関数 $f(\sin x,\cos x)$」とは，たとえば$\frac{A_{23}\sin^2 x\cos^3 x+A_{12}\sin x\cos^2 x}{B_{11}\sin x\cos x+B_{00}}$のように，分子と分母がともに$\sin x$と $\cos x$の多項式である関数です.

Q. 「帰着する」とはどういう意味ですか．それを示せといわれたら，何をすればよいですか.

A. まわりまわって結局そうなるとき「帰着」するといいます．この問題文は「有理関数の不定積分で表され，必ず積分できることを示せ」と同じです．後半部分「有理関数は必ず積分できる」ことは p.84 の(4.14)のすぐ上に宣言してあるので，この問題は「$\mathrm{t}=\tan\frac{x}{2}$という置換により$f(\sin x,\cos x)$が t の有理関数となることを示せ」ば十分です（$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$の変換も言う必要があります）.

Q. なぜ有理関数だと必ず積分できるのですか.

A.　有理関数は部分分数分解できるので，積分できる分数関数の和で表されるからです.

Q. 「$f(\sin x,\cos x)$が t の有理関数になる」ところを説明してください.

A.　まず，$f(\sin x, \cos x)$が $\sin x$と $\cos x$の有理関数ということを式で書くと $f(\sin x, \cos x) = \frac{\sum_{m,n} B_{mn} (\sin x)^m (\cos x)^n}{\sum_{i,j} A_{ij} (\sin x)^i (\cos x)^j}$です．

つぎに，変数変 $t = \tan\frac{x}{2}$から，$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,　$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

さらに，$dt = \frac{dt}{dx}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1+t^2}{2}dx \to \ dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

こうして

$$f(\sin x, \cos x)dx = \frac{\sum_{m,n} B_{mn} (\sin x)^m (\cos x)^n}{\sum_{i,j} A_{ij} (\sin x)^i (\cos x)^j}dx = \frac{\sum_{m,n} B_{mn} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^m \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^n}{\sum_{i,j} A_{ij} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^i \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^j}\frac{2}{1+t^2}dt$$

となります．最右辺は$(1+t^2)^{i+j}$もしくは$(1+t^2)^{m+n}$の最大次数のものを分子分母に掛けると，tの有理式×dtとなります．

演習[1] (2) $\int (2x+5)^5 dx$

Q. 置換積分ですか.

A. 質問としては未熟ですね（以下も同様）．置換積分です．これを式の展開で計算する人はいないでしょう．

$$t = 2x+5, \quad dt = 2dx,\ dx = \frac{1}{2}dt \quad \to \int (2x+5)^5 dx = \int t^5 \frac{1}{2}dt = \frac{1}{12}t^6 = \frac{1}{12}(2x+5)^6 + C$$

演習[1] (3) $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\, dx$

Q.　どう置換すればよいのですか.

A. $t = 2x^2$, $s = 1 - 2t = 1 - 2x^2$ですが下の計算を追跡してください．

$$\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\, dx = \int x\sqrt{1-2x^2}\, dx = \int \sqrt{1-2x^2}\, xdx = \int \sqrt{1-2x^2}\frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-2t}\, dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-2t}\ \left(-\frac{1}{2}\right)d(1-2t)$$

$$= \frac{-1}{4}\int \sqrt{s}ds = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}s^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

演習[1] (4) $\int \frac{x^3-x+1}{x^2+1}\ dx$

Q. 部分分数分解がわかりません.

A. すべきことは，部分分数分解の前に式の割り算です．やってみると，部分分数分解（してはいるのだが）するまでもなく

$$\frac{x^3-x+1}{x^2+1} = \frac{\{x(x^2+1)-x\}-x+1}{x^2+1} = x - \frac{2x-1}{x^2+1} = x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

のように，見た顔が出てきます:

$$\int \frac{x^3-x+1}{x^2+1}dx = \int x\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} + \arctan x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x + \mathrm{C}$$

演習[1] (5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Q. 詳細な計算を知りたいです.

A.　$t = \sqrt{1-x^2}$とおけば，両辺を 2 乗して　$t^2 = 1 - x^2$．両辺の微分をつくると　$2tdt = -2xdx$，これを変形して，

$$\frac{dx}{x} = -\frac{t}{x^2}\, dt = \frac{t}{t^2-1}dt$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{(t^2-1)} dt = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\{\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1}\} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + C$$

絶対値記号の中で符号を反転しても差がないから，教科書の答えと同じです．

演習[1] (6) $\int \frac{1}{\tan x} dx$

Q. 計算の仕方が分かりませんでした．

A. $\mathrm{d}(\sin x) = \frac{d(\sin x)}{dx} dx$　の関係を用いると$\int \frac{f'}{f} dx = \int \frac{f' dx}{f} = \int \frac{df}{f} = \log f + C$から

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \log|\sin x| + C$$

演習[1] (7) $\int x^2 \sin x \, dx$

Q. 部分積分を 2 回やったのですか？

A. そうです．

$$\int x^2 \sin x \, dx = \int x^2 \left(-\frac{d\cos x}{dx}\right) dx = -x^2\cos x - \int \left(\frac{d}{dx}x^2\right)(-\cos x)\, dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x \, dx$$

$$\int x\cos x \, dx = \int x\left(\frac{d}{dx}\sin x\right) dx = x\sin x - \int \frac{dx}{dx}\sin x \, dx = x\sin x - \int \sin x \, dx = x\sin x + \cos x$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + \mathrm{C}$$

演習[1] (9) $\int cos^2 x \, dx$

Q. 倍角の式がわかりません．

A. 困りましたね．倍角の式は加法定理から理解できるのですが・・・

$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$

演習[1] (10) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

Q. aとxがあるとき置換の定石はありますか．

A.　aとxの関係にもよりますが，あります．問題 4-2 {1}(6)に収録してあります．

まず，aを積分の中から消しましょう：

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \int a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\; \underbrace{a \times d\left(\frac{x}{a}\right)}_{dx\text{と同じ}} = a^2 \int \underbrace{\sqrt{1-u^2}}_{u=x/a} du$$

ここから置換積分：

$u = \sin t$（t=arcsin u)とおくと，$\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$，　$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}} = \cos t$　だから

$$\int \sqrt{1-u^2} du = \int \cos t \cos t \, \mathrm{dt} = \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{2}\arcsin u = \frac{1}{2}u\underbrace{\sqrt{1-u^2}}_{\cos t} + \frac{1}{2}\underbrace{\arcsin u}_{t}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = a^2 \int \sqrt{1-u^2} du = a^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \mathrm{C}$$