課題　No.2

Q. arc が苦手です．どうしたらわかりやすくなりますか？

A.　慣れるしかありません．時間をかけてください．しかし，やみくもにやるのでなく，順序だてて：

①arc だけを切り離してはいけません．arcsin , arcos, arctan と 6 文字続けてください．

②「arcsin$x$はサインの値がxになる角度」，「arccos$x$はコサインの値がxになる角度」，「arctan$x$はタンジェントの値がxになる角度」と毎日 3 回唱えてください．その前に，教科書 2 章の三角関数の項を仕上げておかないとタダの念仏になってしまいますが.

③直角三角形に，arcsin x，arcos x, arctan xを描き込んでください．各辺の長さをxで表すとどうなるかを観察してください．

④arcsin x，arcos x, arctan xのグラフを描きましょう．その前に，教科書 2 章で，ある関数のグラフとその逆関数のグラフの図形的関係を確認しましょう．

⑤教科書 3 章でこれらの関数の微分法を確実に復習します．

⑥慣れてきたら，問題を解きましょう：

http://webmath.las.osakafu-u.ac.jp/top/std/stdmon01.jsp?BCD=010000

http://homepage3.nifty.com/rikei-index01/biseki/gyakusankakukansu.html

例 4　$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Q. arctan の値の出し方が分かりませんでした．また，arcsin，cos の値も実数が入ったときわかりません．図を見てもとこの値を取るのかが分かりませんでした．

A.　「積分で単位を欲しければ逆三角関数に慣れておくように」と，微分の講義で注意しておいたのですが・・・

基本を説明する以外ないでしょうね. arctan x は「tan の値がxとなる角度」です．　arctan 0は「tan の値が 0 になる角」=0，arctan 1 は「tan の値が 1 になる角」＝π/2 です.

ところで tan が周期πの周期関数であるために，たとえば arctan 0 は±π，±2π，. . . といくらでも値が出てくることです．この状況をさして「arctan は多価関数である」と言います．この関数のグラフとしては，何層にもなった曲線が出てきますが，混乱を避けるためにどれか 1 つのグラフだけ（通常は原点を通る arctan のグラフ）に注目し，これを主枝と呼びます．したがって，arctan の主枝を扱うとき，その関数値は－π/2 とπ/2 の間となります.

Q. arc を使うべき所が未だに分かりません．

A.　微分法の章に行ってarcsin x，arccos x，　arctan xの導関数を調べてください．それらの導関数が被積分関数として現れたときこそ逆関数を使うべきところです.

例 5　$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

Q. どう変形したらよいかわかりません．

A. 教科書に書いてあるとおりに変形します・・・

「　$t = \sin x$　」とおけば被積分関数は$\frac{\cos x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x}{1+t^2}$，分子に$\cos x$を残してあるのは理由があって，

「　$t = \sin x$とおけば，$dt\left(=\frac{dt}{dx}dx\right) = \cos x\, dx$ 」なので，$\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \frac{\cos x\, dx}{1+t^2} = \frac{dt}{1+t^2}$となります．t の区間は

「　$t = \sin x$とおけば・・・$x = 0$のとき$t = 0$，　$x = \frac{\pi}{2}$のとき$t = 1$」よって

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}$$

不定積分$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$は「arctan t を微分すると$\frac{1}{1+t^2}$になる」ことを，積分記号を使って言い直しているだけです.

例題 4.6(2)　$\int_0^1 x^3\, e^{x^2}\, dx = \int_0^1 x^2 (\frac{1}{2} e^{x^2})'\, dx = \cdots$

Q.　なぜx^3がx^2に変わったのですか？

A.　$(e^{x^2})' = e^{x^2} \frac{d(x^2)}{dx} = 2xe^{x^2}$となるからです.

別解：

不定積分$\int e^{x^2} dx$は初等関数で表すことができないため, 被積分関数がe^tの形となるようにしたいのです. $t = x^2$とします. $dt = 2xdx$も考慮すると　$x^3 e^{x^2} dx = x^2 e^{x^2} x dx = te^t \frac{dt}{2}$

$$\to \int x^3 e^{x^2} dx = \int te^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t \cdot (e^t)' dt = \frac{1}{2}\left(te^t - \int t' e^t dt\right) = \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{(t-1)}{2}e^t = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{x^2} + C$$

教科書の解法がずっとスマートですね.

問題 4-4 {1} (3)　$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4}$

Q.　このような展開になるのはなぜでしょうか？

A.　どこが，どうなることが，分からないのか，伝わってきません．質問の「展開」は「話の運び」くらいの意味だろうか？数学的に「展開」が正しく使われているとは思えません．何を標的にして解答してよいか悩みます.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{x-2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right\} dx = \frac{1}{4}\left\{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+2} - \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}[\log(x+2) - \log(x-2)]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\log\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\log 3$$

問題 4-4 {1} (4)　$\int_{-4}^{-2} \sqrt{x^2-1}\, dx$

Q.　このような展開になるのはなぜでしょうか？

A.　・・・この質問も，困ったなー・・・

部分積分を試みます：

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \int (x)' \cdot \sqrt{x^2-1} dx = x\sqrt{x^2-1} - \int x \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

最右辺，第二項は

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \sqrt{x^2-1} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

となり，求める積分と同じ形が含まれるが，移項してまとめると

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \to 2\int \sqrt{x^2-1} dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log(x + \sqrt{x^2-1})$は，教科書例題 4.2(3)を手本にすると

$t = x + \sqrt{x^2-1}$とおく． $t - x = \sqrt{x^2-1}$の両辺を 2 乗すると$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 - 1$　$\to t^2 - 2tx = -1$　$\to x = \frac{t^2+1}{2t}$だから

$$\sqrt{x^2-1} = t - x = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t},\quad dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\right)dt = \frac{t^2-1}{2t^2}dt \to \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{2t}{t^2-1}\frac{t^2-1}{2t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \log t$$

$$= \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

以上をまとめると

$$\int_{-4}^{-2}\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_2^4\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_2^4=\frac{1}{2}\left(4\sqrt{15}-2\sqrt{3}-\log\frac{4+\sqrt{15}}{2+\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{15}-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log\frac{4+\sqrt{15}}{2+\sqrt{3}}$$

(対数の引数は,分子と分母に $2-\sqrt{3}$を，さらに $4-\sqrt{15}$をかけると巻末解答と同じ)

問題 4-4 {1} (5) $\int_0^2 x^2e^{-3x}dx$

Q. 部分積分を繰り返し行うのですか？

A. はい

問題 4-4 {1} (6) $\int_0^{\pi/2} x^3\sin x\,dx$

Q. どちらを部分積分すればよいのかわからなかった.

A. そういうときは，両方とも試してみましょう.

問題 4-4 {1} (8) $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

Q. なぜ$x+1=2\sin^2 t$と置くのかわかりません.

A. 積分計算について，この「なぜ」は無意味な問です.「このように置くとうまく計算できるから」としか言いようがありません.「このように置くのは，何を狙ったのですか」という問は意味がありますが，計算をしてみれば答えは明白です．他人に聞くまでもないでしょう．答えが明白でないと，次の質問がでてくるのかな.

Q. 置いた後の計算方法がわかりません.

A. 三角関数の取り扱いの練習不足なのでしょうね．教科書の 2 章までを徹底的におさらいする必要があります．積分のための下の式変形は巻末解答とほとんど同じですが，ひとつずつ追って見てください.

$$x+1=2\sin^2 t=1-\cos 2t\,,\qquad \frac{dx}{dt}=4\sin t\cos t$$

$$\to\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\sqrt{\frac{2\sin^2 t}{2-2\sin^2 t}}\,dx=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\frac{dx}{dt}dt\ =\frac{\sin t}{\cos t}4\sin t\cos t\,dt=4\sin^2 t\,\mathrm{dt}$$

$$\to\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=4\int\sin^2 dt=2t-\sin 2t$$

積分区間は $x=-1\to 1$に対応して $x+1=2\sin^2 t=0\to 2,\ \sin^2 t=0\to 1,\ t=0\to\frac{\pi}{2}$, この区間で $\frac{dx}{dt}\geq 0$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{dt}=2[(t-\sin 2t)]_0^{\pi/2}=\pi$$

問題 4-4 {2}

Q. 図を用いて解いても良いのですか？

A. 証明する問題なので，証明に必要と考えるなら図を用いてください.

Q. これを解答では$t=-x$とおいていますが，なぜこの数字をおくのでしょうか？

A. 区間が$x=-a\to 0$の定積分と$x=0\to a$の定積分を比較したいのですが，置換により積分区間を同じにして比較をしようとします.

Q. $t=-x$と置いているので，$\int_0^a f(-t)(-dt)=\int_0^a f(x)dx$となるのではないのですか？

A. 置換により変数を変えるとき，積分区間も新しい変数で表さなければいけません.

問題 4-4{3}

Q. 積和の公式は覚えるしかないのですか？

A. 覚えたくなければ導けるようにしましょう. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$だけ覚えていれば全部出てきます.

Q. どの公式を使うかはなれるしかないのですか？

Q. どのような置換をすれば良いのかは，なれるしかないのですか？

A. そうだと思います.

Q. $\sin(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}$となるのはなぜでしょうか？

A. 実際右辺を加法定理で変形すると左辺に一致しますが，質問の「なぜ」は何を疑問に思っているのか理解できませんでした. もし等号が不成立と考えているなら，どんな式なら良いと思うかを述べる必要があります. そうしたら議論がかみあいます.

Q. 部分分数の使い方が分かりません.

A. 部分分数が関係する式変形は出てきませんが？

Q. m=n のときと，m≠n のときとで場合分けをし，積和の公式を用いて変形するという考え方でよいのでしょうか？ m=n のときと，m≠n のときとで場合分けをし，二倍角と積和の公式を用いれば良いのですか？

A. はい. 一般的なm,nで計算すると分母が$m-n$になる項が出てくるので，$m=n$の場合を別に扱う必要があります.

Q. C=1 とおいていますが，なぜでしょうか？

A. C は何？ 質問を理解できませんでした.

例題 4-7

Q. 連続でない場合は，なぜ極限を求めるのですか？

A. 定積分$\int_a^b f(x)dx$ は，微小な長方形の面積 $f(x)\times\Delta x$ を「寄せ集めた」ものとして定義されます. もし，積分区間の端あるいは内部の点$x=c$で$f(x)$が無限大に発散する（したがって不連続）とき，式(4.26)で右辺の和をとろうとしても，項の値が存在しない場所があるのだから，和を実行できなくなります. 積分の定義式が不成立ならば，積分そのものが存在しない（積分することが許されない，積分できない）ことになります.

少しだけ定義をゆるくして（積分の定義を変えて），積分が存在すると考えるのが広義積分です：発散する点だけを除いて積分を実行します. すなわち$f(\mathrm{c})\times\Delta x$で$f(\mathrm{c})$が無限大に発散しても$\Delta x$が 0 になるのだから，条件がうまくあえば$f(\mathrm{c})\times\Delta x$が 0 になるだろうと考えます. 連続なときには$f(\mathrm{c})$が有限の値だから，$f(\mathrm{c})\times\Delta x$は必ず 0 になります. その親戚筋のものなら積分として受け入れようと考えるのです.

$f(\mathrm{c})$が無限大に発散する点を除外する作業が，$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{c+\epsilon}^{a} f(x)\,dx$などです. 発散する点が c のとき，たとえば c より右の区間$[\mathrm{c}+\epsilon, a]$での積分は連続関数の定積分です. 連続関数である区間をぎりぎりのところまで広げて行ったときの積分の極限値をもって積分の値と定義するのです.

Q. なぜ，連続でないときに積分が意味を持たないのかが分かりません.

A. すぐ上で答えました.

Q. ε が出てくると極限の考え方がよく分かりません.

A. 心理的な問題でしょうか. ε (イプシロン)という文字が出たからといって難しく考える必要はありません. たとえば$\lim_{x\to 0}x^2=0$と$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^2=0$は同じ内容です.

(1) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Q. なぜ連続でないことがすぐにわかるのですか？

A. $\frac{1}{\sqrt{x}}$は$x=0$で無限大に発散します. 無限大というのは，値が存在しないということです. 関数の値が存在しないところは不連続です（教科書の前のほうで習った「連続の定義」を復習してください).

Q. $\sqrt{\varepsilon}\to 0$というのがよくわかりませんでした.

A. $\lim_{\epsilon\to+0}\sqrt{\epsilon}$の「$\lim_{\epsilon\to+0}$」は「εが正のままで 0 に限りなく近づく」ことを意味します．もし$\sqrt{\epsilon}$が 0 でない値に収束するなら，その二乗であるεが 0 にはなりません．$\sqrt{\epsilon}$が発散するならεも発散します．したがって，$\lim_{\epsilon\to+0}\sqrt{\epsilon}=0$です．

(2)$\int_0^2\frac{dx}{2-x}$

Q. なぜ，極限を持たないのかがよくわかりません．

Q. $\lim_{\epsilon\to+0}\log\epsilon$が分かりません

A. 対数関数のグラフを描きましょう. log x は x→0(x>0)で負の無限大に発散します. このことを式で表すと$\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$と書けます．$x$を$\epsilon$におきかえて書き直すと$\lim_{\epsilon\to+0}\log\epsilon=-\infty$ ．

有限の値に収束しないときは「極限値が存在しない」のです．結局，この広義積分には値がなく，積分（の値）が存在しません（積分が存在しないとも言うし，積分は無意味だともいいます）．

(3)$\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

Q. 2 つとも試す必要があるのですか？

A. はい．この問題のように積分区間の内部に被積分関数が発散する点があるとき，その両側からそれぞれ極限をとる必要があります．この例題と異なり，片側からだけで関数し他の側からは有限の値であれば，発散する側からだけ極限をとれば十分です．

Q. ε1＝ε2 として考えることもあるのですか？

A. あります，このとき，無限大に発散する点の両側からその点に迫る速さが同じということです．左右で正負の無限大に発散する（たとえば 1/x における原点）とき，そのような極限の取り方をすると極限値が存在する場合もあります（主値積分）．

Q. 広義積分のεは独立して 0 に近づくと書いてありますが，同時にεが 0 に近づくとコーシーの主値積分との違いがよく分かりませんでした．

A.すぐ上の説明で理解できただろうか．

Q. なぜ，ε→+0 と置くのかが分かりません．0 ではいけないのですか？

A. いけません．ε→0 という記号は，注目する点の左側からも，右側からも，極限をとる意味だと言うことを思い出してください．広義積分は，本質的には，積分区間の端に無限大に発散する点がある場合を計算します．区間の内部に発散する点があるときは，その点を境に積分区間を分解しているのです．たとえば，積分区間の左端に不連続点があるときは，$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{c+\epsilon}^{b}f(x)dx$として右側から迫って極限値を調べるわけです．もしこの積分で$\epsilon\to-0$とすると，積分区間の外側から極限をとることになってしまいます．$\lim_{\epsilon\to-0}\int_a^{c+\epsilon}f(x)dx$と$\lim_{\epsilon\to+0}\int_a^{c-\epsilon}f(x)dx$とは同じ内容です．

例題 4-8

Q.「この積分は意味をなさない」というのは，何を基準に判断すれば良いのですか？

A.「広義積分が収束しない」「広義積分の値が 1 つの有限の値では表せない」「広義積分が値を持たない」「積分記号を使って何か書いてあるが，定義に従って計算しようとしても値が存在しない（計算不可能）」ときに「積分が意味をなさない」と言います．

(1) $\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+4}$

Q. なぜ，$\frac{1}{t^2+a^2}$を積分すると arctan(t/a)となるのでしょうか？

A. 質問の「なぜ」は不要ですね．arctan(t/a)を t で微分して$\frac{1}{t^2+a^2}$になっていれば良いのです→なりませんね！$\frac{a}{t^2+a^2}$を積分します．

(2) $\int_{-\infty}^{0}e^{kx}dx, k>0$

Q. e のマイナス乗は存在しない気がするのですが，なぜこれを 0 と扱ってよいのでしょうか？

A. $\lim_{t\to\infty}e^t=\infty$，$\lim_{t\to-\infty}e^t=\lim_{s\to\infty}e^{-s}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{e^s}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to\infty}e^3}=0$

問題 4-5 {1} (1)　$\int_0^3 \frac{dx}{x^{1/4}}$

Q.　このような展開になるのはなぜなのでしょうか？

A.これは「まったく分かりません」と言っているのかな？もし「ここが，このようにならないのは何故か」という具体的な質問であれば答えられるのですが．

Q.　なぜ，$\varepsilon^{\frac{3}{4}}$がなくなるのかが分かりません．

A. $y = x^{3/4}$のグラフを描くことができますか？$1 > x > 0$で$\sqrt{x} > x^{\frac{3}{4}} > x$となることを使って挟み撃ちで考えても分かるのでは？

問題 4-5 {1} (2)　$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Q.　$(x-1)^2 = 0$になるのは$x = 1$なのですが，解答に当てはまりませんでした．

A.「解答に当てはまりませんでした」というところが何を表しているか理解できませんでした．

Q.　上記 2 問ともなぜ t=(式内の数)と置かず，初めて見るものを x へ代入するのかわからない．

A. 質問を理解できませんでした．

問題 4-5 {1} (4)　$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

Q.　x=0 で非連続となるのではないのですか？

A. たしかに被積分関数は$x = 0$で『不連続』です（非連続とは言いません）．しかし積分区間内では連続ですから，広義積分として$x = 0$を考慮する必要はありません．

問題 4-5 {1} (6)　$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\, dx$

Q.　計算方法がわかりません．

A. 教科書の巻末にある略解を見てください．その「どこが」「どのように」分からないか，「こうなるはずだと思うのに，そう書いていない」という質問してください．

問題 4-5 {2 } (1) $\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x}$，$\alpha > 1$

Q.　計算過程で$a^2 = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$とありましたが，これは「無限大に限りなく近づく$a$は，$a > 0$となるならばどんな定数にでも変換してよい」ということでしょうか？

A. これは，単に$\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$と書くのが煩雑なので$a^2$と書き直しただけです（$a^2$としたのは積分公式にあてはめ易くするため）．『定数』はどのように書きなおしても，逆にたどったときにもとの定数（だけ）が出てくる書き換えなら，それでかまいません．

ところで，「定積分で『変数』を置換するとき，何か制限があるだろうか」という問題提起は重要です．もとの変数の積分区間内で新しい変数が一価，連続，単調であることが望ましいです．そうでない場合には，積分区間をいくつかに分解して，小区間内で一価，連続，単調を確保すべきです．

ちなみに，この問の積分$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x}$，$\alpha > 1$ は，被積分関数は連続だし，積分区間も有限の閉区間ですから通常の積分ですが，与えられた置換を実行すると，積分区間が半無限の区間となり広義積分の対象となることに注目するとよいでしょう．

Q.　$x = 2\arctan t$,$t = \tan(\frac{x}{2})$となるのはなぜですか？

A. $x = 2\arctan t$の両辺を 2 でわると$\frac{x}{2} = \arctan t$です．arctan というのは tan の逆関数のことなので

$$\tan\frac{x}{2} = \tan(\arctan t) = t$$

問題 4-5 {2 } (2)$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx \quad (a>0)$

Q. とうして$\sqrt{ax-x^2}=a\sin t\cos t$となるのですか？

A.　$x=a\sin^2 t$とおいたので

$$\sqrt{ax-x^2}=\sqrt{a\cdot a\sin^2 t-(a\sin^2 t)^2}=a\sqrt{\sin^2 t\,(1-\sin^2 t)}=a\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sin t\cos t$$

Q. $x=a\sin^2 t$と置くとき，なぜ$0\le t\le\frac{\pi}{2}$の範囲でしか考えないのですか？

A.　積分区間は$x=0\to a$となっています．$x=a\sin^2 t$とおいたので，$\sin^2 t=0\to 1$です．Sin の二乗は周期関数なので，この状況を表す t の範囲は各種あるのですが，$t=0\to\frac{\pi}{2}$とすれば$\sin^2 t$は単調増加となり x が増加するとき t も増加します．このように選べば，変換後のとりあつかいに誤りが入り込みません．

演習問題[2] (4) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Q. 詳しい計算方法を教えてください．

A. 演習問題[1](10)はできましたか？

$$x=a\sin t\ \to\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t,\quad dx=a\cos t\ dt$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ =a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{a^2}{2}\,(t+\sin t\cos t)=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)\right]_0^a=a^2\arcsin\frac{a}{a}=a^2\frac{\pi}{2}$$

この定積分は半径 a の半円の面積を求めるものだから，直ちに$a^2\frac{\pi}{2}$としてもかまいません．

演習問題[2] (6)　$\int_0^1\frac{1}{x^a}dx,\quad 0<a<1$

Q. $\frac{1}{x^a}$ の積分が分かりませんでした．

A.　まず，被積分関数は積分の下端で（分母が 0 に近づいて）発散するので，広義積分を計算し収束して答えが出てくればそれが積分の値であり，収束しなければ値がないのだから積分が無意味となります．

$$\int_0^1\frac{1}{x^a}dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1\frac{1}{x^a}dx$$

$$\int\frac{1}{x^a}dx=\int x^{-a}dx=\frac{1}{1-a}x^{1-a}$$　($\because 0<a<1$ だから，この式だけでＯＫ．$a=1$ だと別に計算することになる)

$$\int_0^1\frac{1}{x^a}dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1\frac{1}{x^a}dx=\frac{1}{1-a}\lim_{\epsilon\to 0}\{1^{1-a}-\epsilon^{1-a}\}=\frac{1}{1-a}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{1-\epsilon^{\text{正の数}}\right\}=\ \frac{1}{1-a}$$

演習問題[2] (7)

Q. 広義積分をすればよいのでしょうか？

A.被積分関数が x=3 で発散するので，広義積分をしてみる以外に道はありません．広義積分の式を書いたからと言って，もし積分の値が有限の値にならなければ，積分は存在しないから無意味な積分式となりますが・・・それは，広義積分を計算してみなければわかりません．

演習問題[2] (8)

Q. これは∞，－∞のどちらを基準にすればよいのでしょうか？

A. 質問を理解できませんでした．

Q. 積分の仕方が分かりませんでした．

Q. 広義積分において$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$で解いてしまい，解答が π となってしましましたが，解答では，$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$となっていたのですが，なぜでしょうか？

A. WebPage の資料に書いてあるのですが．．． 参照しているだろうか？ 積分は次のように行います：

$t=e^x$とおくと，$dt=e^x dx$したがって$dx=e^{-x}dt=\frac{dt}{t}$. $x=-\infty\to\infty$ に対応して$t=0\to\infty$. 総合すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^\infty \frac{1}{t+1/t}\cdot\frac{dt}{t}=\int_0^\infty\frac{dt}{t^2+1}=[\arctan t]_0^\infty=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

「解答では，$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$となっていた」の「解答」はどこだろう？ 被積分関数は偶関数だから，積分区間を$[0,\infty)$としたときの計算結果を 2 倍にしたものが本来の積分の値であるとすることもできます．このとき t の範囲が$[1,\infty)$となります．

演習問題[2] (10) $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Q. どう変形したらよいかわかりません．

A. だれでも，e^xやe^{-x}の積分ならわかる，分母の$\sqrt{x}$はいやだな，と思うでしょう．そうしたら$x=t^2$とおいてみたくなりませんか？ この積分は，さらに運が良くて，分母の$\sqrt{x}=t$が消えてしまうのです：

$$\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{e^{-t}}{t},\quad dx=2tdt,\quad t=x^2=1\to\infty,\quad \int_1^\infty\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^\infty\frac{e^{-t}}{t}2tdt=2\int_1^\infty e^{-t}\,dt=-2[e^{-t}]_1^\infty=-2\{0-e^{-1}\}=\frac{2}{e}$$

演習問題 [6] (1)

Q. 2 つの関数fとgをどのように設定すればよいか分かりません．

A. 教科書の図にあるとおりなのですが，$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$、$g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$とします．そうすると

$$S=\int_{-a}^{a}\{f(x)-g(x)\}\,dx=2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\underbrace{=}_{\text{演習[2](4)}}2\frac{b}{a}\times\pi\frac{a^2}{2}=\pi ab$$

Q. 楕円の原点を中心としているので$S=4\int_0^a\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$として解いても良いと思うのですが，自明として，4 倍にして良いのでしょうか？それとも何か断りを入れる必要があるのでしょうか？

A. 行儀が悪くても嫌われないと思ったときは，何も言わずに，どうぞ．

演習問題 [8]

Q. どのように計算すればよいのでしょうか。
定理の内容がよく理解できませんでした。
公式の導き方が分かりませんでした。

A. 有限個の滑らかな曲線をつないで出来た曲線ならば計算できる方法です。1 個の滑らかな曲線の長さが求められるなら OK ですね。長さを求めたい曲線が$y=f(x)$のグラフの一部であるとしましょう。滑らかな曲線を十分に拡大してみると直線に見えますから、直線の長さがわかればよいのです。

曲線上の点$\mathrm{P}(x,f(x))$と、P に近い点$\mathrm{P}'(x+\Delta x,f(x+\Delta x))=\mathrm{P}'(x+\Delta x,f+\Delta f)$の長さを線分$\mathrm{PP}'=\sqrt{\Delta x^2+\Delta f^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$とほぼ（近似的に，という）等しいとします．$\Delta x\to 0$の極限(0 にはならないので dx と書きます，また$\frac{\Delta f}{\Delta x}\to\frac{df}{dx}$)で曲線と線分の長

さは一致すると同時に，全体の長さを求める作業は無限個の項数の和となります．これは教科書の§4.3 のはじめのほうの説明にあるように，リーマン和の極限すなわち定積分で表すことができます：

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

この設問の具体的な計算は次の通りです：

(1)　$y = f(x) = 2x^{\frac{3}{2}},\quad x = 0 \to 3$

$$\frac{df}{dx} = 3x^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+9x},$$

$$\int_0^3 \sqrt{1+9x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_1^{28}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{28} = \frac{2}{27}\left(28\sqrt{28}-1\right) = \frac{2}{27}\left(28\sqrt{28}-1\right) = \frac{2}{27}\left(56\sqrt{7}-1\right)$$

(2) $24xy = x^4 + 48,\ \ x = 1 \to 3$

$$y = \frac{x^4+48}{24x} = \frac{1}{24}x^3 + \frac{2}{x},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^4-16}{8x^2}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x^4-16}{8x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{64x^4+(x^8-32x^4+256)}{64x^4}} = \frac{x^4+16}{8x^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^4+16}{8x^2}\mathrm{d}x = \int_1^3\left(\frac{x^2}{8}+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{24}-\frac{2}{x}\right]_1^3 = \left(\frac{27}{24}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{24}-2\right) = \frac{29}{12}$$

演習問題［10］

Q. 台形公式とは何ですか？

A. これは用語の問題ですね。用語がわからない場合、まず教科書の索引で検索して、あればその個所を読みましょう。そうすると p.104 の式(4.47)のことで、積分を有限個の和で近似的に与える式であることがわかるはずです。索引になければ、インターネットを検索するのもよいでしょう。講義では、(4.47)式が意味するものが何か、という視点で説明をします。なお、この質問は自分で解決できるものだと思います。

Q. シンプソンの公式がよくわかりませんでした。

A. この質問、もしかすると教科書を読まずに、でしょうか？シンプソンの公式とは式(4.49)のことです。被積分関数と x 軸の間の面積を近似的に計算するための公式です。求める面積を x 軸方向に 2m 等分し、隣合う 2 個ずつの帯をペアにして面積を計算し、m 個のペアの面積を加算します。ペアの帯の面積は、両端と中央の 3 点をとおる放物線の下側の面積で近似します。

Q. arctan(1/2)の値はどのようにしたらわかるのですか。

A. 安直な方法としては関数電卓、計算ソフトや高級言語の組み込み関数を使います。

一方、マクローリン展開(x<1 でないと収束しませんが)する手もあります（arctan の導関数の計算は教科書 p.50 に出ているから、心配ないですね)。$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ 7 次までで計算すると$\frac{6229}{13440} \simeq 0.4635.$