課題：

教科書の問題 4-4 {3} は，基本周期を2πとするサイン・コサイン関数の直交関係を示す計算である．これらの式を基本周期を T とするサイン・コサイン関数（変数を t とせよ）の直交関係に書き直せ.

解：

0) 準備

・周期 T のサイン関数の形を決めたい．そこで，これから定める定数ω（オメガ）を用いて$\sin(\omega t)$と書こう．ωの値次第でどのような周期のサイン関数でも表せるからである．

・周期 T ということは「t が 0 から T まで動くと，サインの値が初めてもとに戻る，いいかえるとサインの引数が 2π だけ変わる」ことを意味するから，$\omega T = 2\pi$である．

$$\boxed{\text{周期 T のサイン関数：} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad \text{周期 T のコサイン関数：} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

・問題に出てくるのは$\sin mx$，$m = 1,2,3,\cdots$などである．たとえば$\sin 2x$はxの値がπだけ変わると $2x$が 2π 変わってもとにもどる，すなわち周期が$\pi = \frac{2\pi}{2}$である．同様に，$\sin mx$の周期は$\frac{2\pi}{m}$である．

・以下で使うサイン・コサイン関数は，$\sin mx$, $\cos nx$の代わりに

$$\boxed{\sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right), \quad \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

であり，それらの周期はT/m，T/nである．同じ関数を

$$\boxed{\sin(m\omega t), \quad \cos(n\omega t), \quad \omega = 2\pi/T}$$

と表してもよい.

(1) $\int_0^{2\pi} \sin mx\, dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = 0$

この２式は「周期が$\frac{2\pi}{\text{整数}}$のサイン・コサイン関数は，基本周期 2π の長さをもつ区間で積分すると 0」であることを主張している．サイン・コサインは横軸について対称であり，基本周期の中で同じ回数だけ軸の上側と下側に顔をだすから，定積分は正負の面積を同量集めて 0 になる.

これに対応して

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt = 0, \quad \int_0^{\mathrm{T}} \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt = 0,$$

$$\left(\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\, dt = 0, \quad \int_0^{\mathrm{T}} \cos(n\omega t)\, dt = 0, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

を示せばよい．括弧内の式が少しだけ文字が少ないから，こちらを使う：

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\, dt = \frac{-1}{m\omega}[\cos(m\omega t)]_0^{\mathrm{T}} = \frac{-1}{m\omega}[\cos(m\omega T) - \cos 0] = \frac{-1}{m\omega}[\cos(2\pi m) - \cos 0] = \frac{-1}{m\omega}(1-1) = 0$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} \cos(m\omega t)\, dt = \frac{1}{m\omega}[\sin(m\omega t)]_0^{\mathrm{T}} = \frac{1}{m\omega}[\sin(m\omega T) - \sin 0] = \frac{1}{m\omega}[\sin(2\pi m) - \sin 0] = \frac{1}{m\omega}(0-0) = 0$$

よって

$$\boxed{\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\, dt = 0, \quad \int_0^{\mathrm{T}} \cos(n\omega t)\, dt = 0, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad m, n \text{は整数}}$$

(2) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0$

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)\, dt = \int_0^T \frac{1}{2}\{\sin(m+n)\omega t + \sin(m-n)\omega t\}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sin(m+n)\omega t\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \underbrace{\sin(m-n)\omega t}_{*}\, dt = 0$$

最後の等号は，m≠n の場合は(1)により成り立つ．m=n の場合はとくに被積分関数＊が sin0=0 となることにより成り立つ

よって

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = 0, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad m, n\text{は整数}$$

(3) $\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0$

m ≠ nの場合は，(1)により

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{-1}{2}\{\cos(m+n)\omega t - \cos(m-n)\omega t\}\,dt = \frac{-1}{2}\{\int_0^T \cos(m+n)\omega t dt \;-\; \int_0^T \underbrace{\cos(m-n)\omega t}_{**}\,dt\} = 0$$

$m = n$の場合は，＊＊が cos 0 =1 となることから

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = \frac{-1}{2}\int_0^T \{\cos(m+m)\omega t - 1\}dt = \frac{-1}{2}\int_0^T \{\cos 2m\omega t - 1\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T 1\,dt = \frac{T}{2}$$

ここまでを整理すると

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 \cdots m \neq n \\ \dfrac{T}{2} \cdots m = n \end{cases}$$

両辺を T/2 で割ると

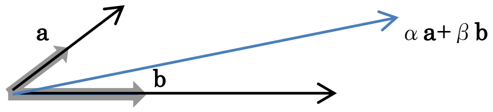
$$\frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 \cdots m \neq n \\ 1 \cdots m = n \end{cases}$$

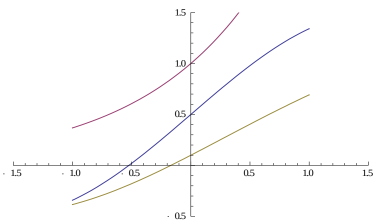
同様に

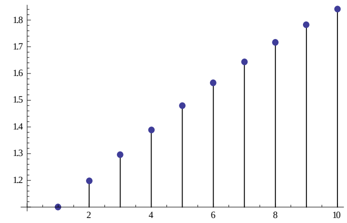
$$\frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 \cdots m \neq n \\ 1 \cdots m = n \end{cases}$$

参考：直交関数系

・関数をベクトルと考える：ベクトルの代数的な定義は「スカラー倍とベクトル和という演算が定義され，その演算の結果である $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ が再び同じ仲間のベクトルとなる」ものである．







・関数は，定数倍と和$\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$が再び関数となることからベクトルである．(正確には「関数空間は左の演算によりベクトル空間となる」)．$f(x)$とは，xに対する値$f(x)$の与え方の規則である．実数のある区間で定義された関数$f(x)$を考える．区間内にとびとびに点をとり$x_k(k = 0,1,2,\cdots)$とし各点での関数値を$f_0, f_1, f_2, \cdots$と書く．とびとびだが数の並び'$(f_0, f_1, f_2 \cdots)$は，ベクトルとしての関数$f(x)$の成分表示になる．関数$\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$は $(\alpha f_0 + \beta g_0), (\alpha f_1 + \beta g_1), (\alpha f_2 + \beta g_2), \cdots$である．ほんとうは，実数の区間を定義域とする関数は実数の濃度で無限にある成分を定義しなければいけない：関数でつくられるベクトル空間は，実数濃度の次元をもつ．(3 次元空間では 3 個の成分でベクトルが一つに決まる．)

・　「直交」という用語は本来は幾何学で直角に交わることを言う．2 次元あるいは 3 次元ベクトル$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$と$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$が直交するとき，内積が 0 になることを成分で表すと$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \Sigma a_j b_j = 0$である．

・ベクトルとしての関数の内積は

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \mathrm{N}\to\infty}} \sum_{k=1}^{N} f_k g_k\,\Delta x = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \mathrm{N}\to\infty}} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)g(x_k)\,\Delta x = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(x)g(x)\,dx$$

この値が 0 になるとき「$f(x)$と$g(x)$は直交する」という．関数の集まり$\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \sin x, \sin 2x, \cdots\}$は互いに直交する関数の集まりである：「直交関数系をなす」という．