問題 6-3　演習 6-[3][4]　Q&A

問題 6-3　1（2）

Q. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{1}{r} sin\theta dr d\theta d\varphi$の式で，真ん中の積分範囲が 0~π なのはなぜですか？

A. 積分領域は半径 a および b の２つの同心球に挟まれた部分です．θは極座標で z 軸から降ろしてきた角ですから，球面の全域をカバーするには真上θ=0 から真下θ=π まで振らないとなりません．

Q. ln とは log のことですか？

A. 底がeの対数を自然対数(log natural)と言います．その略号 ln が関数記号としてよく用いられます．底を 10 とする常用対数を底を書かずに log とすることもよくあるので間違えを減らしたいという理由もあります．・・・と前期の微分の講義で説明をしました．

問題 6-3　3

Q. J が 3×3 の場合，どう計算したらよいかわかりません．

A.　3×3 の行列式の計算は

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

とすることが既知としています．

ところで，座標系(u,v,w)で積分するときのヤコビアンは，３つの微小なベクトル

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du, \frac{\partial x}{\partial v}dv, \frac{\partial x}{\partial w}dw\right), \qquad \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial v}dv, \frac{\partial y}{\partial w}dw\right), \qquad \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}du, \frac{\partial z}{\partial v}dv, \frac{\partial z}{\partial w}dw\right)$$

が作る平行四面体（直方体を押しつぶしたような形で，対向する２面が平行，ある頂点から発する３本の稜線が３つの微小ベクトルとなる）の体積です．

そこで，３本のベクトル $\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{j}} = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3})$, $j = 1,2,3$がつくる平行四面体の体積を考察しましょう．体積は，底面積×高さ．$\vec{\mathrm{a}}_1 \times \vec{\mathrm{a}}_2$という外積で底面積を表すベクトルをつくり，残った$\vec{\mathrm{a}}_3$と内積をつくると，体積になります (全てのベクトルが直交している場合を調べて，その後に斜交する場合を考えるとわかりやすい)．実際，

$$\vec{\mathrm{a}}_1 \times \vec{\mathrm{a}}_2 = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13},\ a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11},\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

$$(\vec{\mathrm{a}}_1 \times \vec{\mathrm{a}}_2)\cdot\vec{\mathrm{a}}_3 = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})a_{31} + (a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})a_{33}$$

この式を展開すると，たしかに行列式の値となっています．

問題 6-3

2.

Q. なぜ P という座標を定めたのですか？ P の Y 座標が$Y = y_2 + \frac{(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_2) - (x_1 - x_2)}$となるのはなぜですか？

A. 図の三角形 ABC の面積を計算するためです：計算しやすい（底辺と高さが座標からすぐに求まる）２つの三角形に分けたかったからです．

巻末略解の式は$Y = y_2 + (y_3 - y_2)/(x_3 - x_2)\cdot(x_1 - x_2)$ となっていますが，点 P が直線 BC：$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$という式を満たすことから$\mathrm{Y} = \mathrm{y}_2 + \{(y_3 - y_2)/(x_3 - x_2)\}\cdot(x_1 - x_2)$と読み取らないといけません．

第 6 章演習問題

[3] (3)

Q. $cos^6\varphi$をどう扱ってよいかわかりませんでした.

A. WebPage に解説を掲載してあります.

[3](4)

Q. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^2 r^2sin^2\theta * r^2sin\theta drd\theta d\varphi$の式で$r^2sin^2\theta * r^2sin\theta$の部分を$r^4sin^3\theta$としても計算できますか？

A. できます.

[4] (1)

Q. 式をどのように立てればよいのかがわかりません.

A. WebPage の解説を参照してください.

Q. 解説で$\iiint_R\ 1 * dxdydz$という式が最初に出てきている理由はなんですか？

A. 「ある領域の体積を求める」とは，微小な体積 dx dy dz を寄せ集めることですから$\iiint_R\ dxdydz$と書けばよかったのですが，以前の質問に「$\int f(x)dx$は$f(x)$の積分だと分かりますが，$\int$ dxは何の積分ですか？」というのがあったため，$\iiint_R\ 1 * dxdydz$と 1 を入れて書きました．本来は書かなくてよい「1」です .

Q. 最後に x=a まで動かした計算をしているのはなぜでしょうか？また，x=a という値はどこから出てきたのですか？

A.

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$，$x/a+y/b+z/c=1$ で囲まれる体積.

なので，この三角錐の領域は x=0 でから a までです.

(2)

Q. $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$の積分がうまく行えませんでした.

A. 教科書 4 章（p.107）に$\sqrt{a^2-x^2}$の不定積分の計算問題が出ていますから，そこの解説を見てください.

Q. どの座標を用いればよいのかは，どのように見分けるのですか？

A. 「計算で楽する（計算間違えを減らす）にはどうすればよいか」を必死に考えます．そうすると，被積分関数が複雑な形になったり，積分領域に関数が入ってきたりするのは避けたいですから，そのあたりを検討することになります.