10 月 3 日のレポートから

広義積分，数値積分，「曲線で囲まれた図形の面積」と「曲線の長さ」の計算は，講義で扱った後に不明な箇所をもう一度質問してください．

Q. 部分積分法で，被積分関数($u \times v'$)のどの部分をu'とおくかで難易度が変わってきます．その指針は何かありますか？

A. 「結果よければ全てよし」なのです．逆に言うと「積分できるように工夫する」のが指針です．

・v'と置いた関数に対してその積分vが求まらなければなりません．

・$u'v$が積分しやすくなければなりません．

と言ってみても，答えにならないかもしれないですね．

Q. 問 4-2 (6) $\int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$は部分積分で計算するのですか？

A.そう思ったら，やってみてください．

じっと見ていると（!），$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$は$t = x^2$とおくと計算できそうに思えます．$\frac{x}{2}$は微分すると定数になってしまいます．となれば，$u = \frac{x}{2}$, $v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$とし，$u' = \frac{1}{2}$,　$v = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{-1}{(t+1)} = \frac{-1}{x^2+1}$.

$$\int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \frac{-1}{x^2+1} - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{x^2+1} dx = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C}$$

最終的な答えは，arctan x から上の値を引けばよいですね．

Q. 問 4-3　部分分数展開とは部分分数分解のことですか？

A. はい，そうです．

例題 4－6

Q. (2)を教科書より詳しく解説してください．

A. 不定積分で書いておきましょう．$\int x^3 e^{x^2} dx$の被積分関数を次のように変形します：

$$x^3 \mathrm{e}^{x^2} = (x^2 \times x)e^{x^2} = x^2 \times xe^{x^2} = \frac{2}{2}x^2 \times xe^{x^2} = \frac{1}{2}x^2 \times 2xe^{x^2} = \frac{1}{2}x^2 \times (e^{x^2})'$$

こうして

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2}x^2 \times (e^{x^2})' dx$$

部分積分を実行すると

$$\int \frac{1}{2}x^2 \times (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2}x^2 \times \left(e^{x^2}\right) - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \times \left(e^{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}\int (e^{x^2})' dx$$

最後の等号は，第二項の被積分関数が，$\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$より，$\frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)'$であることを用いて変形しました．

問 4－4，{1}

(3) Q. 部分分数分解がわかりませんでした.

A. $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$とおくと，$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}$となります.

(4) Q. $\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\sqrt{x^2-1}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$となるところが分かりません.

A. 被積分関数に注目し，$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2+(1-1)}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

■ **$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$は別課題に出した積分**ですから，ここで解説しましょう.

①教科書の例題 4-2 では，$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$ を学んだから，$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\log|x+\sqrt{x^2-1}|+C$ かもしれないと想像して $\frac{d}{dx}\log|x+\sqrt{x^2-1}|$を計算すると，たしかに$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$となって目出度い！積分が出来た！！こうなると，$a=\sqrt{-1}$とおいただけともいえそうですね.

②置換 $t=x+\sqrt{x^2-1}$により，$(t-x)=\sqrt{x^2-1}\to(t-x)^2=x^2-1\to t^2-2tx+1=0\to x=\frac{t^2+1}{2t}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

したがって$\sqrt{x^2-1}=t-x=t-\frac{t^2+1}{2t}=\frac{t^2-1}{2t}$，また $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{(t^2-1)}{t^2}\to dx=\frac{1}{2}\frac{(t^2-1)}{t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{2t}{t^2-1}\times\frac{(t^2-1)}{2t^2}\,\mathrm{dt}=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C=\log|x+\sqrt{x^2-1}|+C$$

③ 置換$x=\cosh t$により，$x^2-1=\sinh^2 t$，$\sqrt{x^2-1}=\sinh t$，$dx=\sinh t\,dt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sinh t}{\sinh t}dt=t+C,\qquad x=\sinh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\to t=\sinh^{-1}x=\log|x+\sqrt{x^2-1}|$$

(8) Q. 途中の計算がわかりません.

A. 本来なら，与えられた定積分の積分区間は$x=-1\to+1$なので，$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$が積分区間の右端で発散しており，定積分の値を得るためには，$\lim_{b\to1}\int_{-1}^{b}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$という広義積分を行う必要があります．しかし，教科書の置換を行ったあとでは被積分関数の発散はなく，通常の定積分が実行できます．式変形を見ていきましょう：

$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1+x}{2-(1+x)}}=\sqrt{\frac{2\sin^2 t}{2-2\sin^2 t}}=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}}=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\tan^2 t}=\tan t\,,dx=\frac{dx}{dt}dt=\frac{d}{dt}(2\sin^2 t-1)dt=4\sin t\cos t\ \ dt$

$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\tan t\times4\sin t\cos t\ \ dt=4\int\frac{\sin t}{\cos t}\times\sin t\cos t\ \ dt=4\int\sin^2 t\,dt=4\int\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt$

$=2\,t-\sin 2t+C=2\,t-2\sin t\cos t+C$，　定積分の計算なので，新しい変数 t の積分区間で計算を実行すれば終了．ここでは，不定積分をもとの変数にもどす作業を（練習のために）やってみます：　$\sin t=\sqrt{\frac{x+1}{2}}$，　$t=\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}$，

$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=2\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}-2\sqrt{\frac{x+1}{2}}\left(1-\frac{x+1}{2}\right)=2\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}-2\sqrt{\frac{x+1}{2}}\left(\frac{1-x}{2}\right)=2\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}-\sqrt{\frac{x+1}{2}}(1-x)+C$

（積分定数は最後以外省略）．この結果から定積分を実行する場合には広義積分を行う必要があります.

$$\lim_{b\to1}\left(2\arcsin\sqrt{\frac{b+1}{2}}-\sqrt{\frac{b+1}{2}}(1-b)\right)=\pi\quad\because\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

たしかに極限が存在し，定積分が有限の値を持つ（積分が存在する）ことがわかります．よって

$$\lim_{b\to 1}\int_{-1}^{b}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\frac{\pi}{2}-\left(2\arcsin\sqrt{\frac{-1+1}{2}}-\sqrt{\frac{-1+1}{2}}\big(1-(-1)\big)\right)=\frac{\pi}{2}-(0-0)=\frac{\pi}{2}$$

問 4－4，{2}

Q. 図を描いて「図より明らか」という解答は許されますか？

A. 時と場合によります.

証明を自分だけのために行うときは，もちろん図を描こうとどうしようとＯＫならＯＫに決まってます！.

他人を説得するために証明するときは，もし相手が何も知らない人で「図を見ても明らかでない」と言うなら，つきあってあげないといけないでしょう．もし相手が教師なら（試験などで自分の能力を認めてほしいための証明）なら，本当に分かっていることをどのように表現したらよいか，と考えてください.

図を見て本質を理解することは非常に重要なことです．図で分かったとき，分かったことを式で表現しようと努力することは，数理的なリテラシーとして必要なトレーニングです.

Q. 問題文に「$f(x)$が連続であるとする」となっています．この条件を外すと成り立たないのですか？

A. 被積分関数が不連続なとき（特に積分区間内で発散するとき）定積分の値が定まらない場合があります．このようなときはそもそも定積分が存在しない（∞となる）ので本文の定理自体が無意味です.

Q. 教科書の巻末の略解を説明してください.

A. $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$: 積分区間を原点で分割した.

偶関数，奇関数の性質は，変数の符号を反転したときの関数値の符号の変化で規定されています．すなわち偶関数：$f(-x)=f(x)$，奇関数：$f(-x)=-f(-x)$．このことを用いるために，変数が負のときの積分（上式の右辺第１項）で積分変数の符号を反転します．式で表すなら$t=-x$とおきます．そうすると

$$\int_{x=-a}^{0}f(x)dx=\int_{t=a}^{0}f(-t)\,d(-t)=-\int_{t=a}^{0}f(-t)\,dt=\int_{0}^{a}f(-t)\,dt$$

最右辺は偶関数ならば$\int_0^a f(x)dx$と等しく，奇関数なら$-\int_0^a f(x)dx$と等しいので，題意が証明されます.

問 4－4，{3}

Q. 追加の課題に出ていた「基本周期 T のとき」とはどういう意味ですか.

A. たとえば「$\sin x$の周期が2πである」とは「どんなxについても$\sin x=\sin(x+2\pi)$が成り立つこと」を意味しています．ところで，どんなxについても$\sin x=\sin(x+4\pi)$が成り立つから 4π もまた$\sin x$の周期であり，同様にして$2\pi\times n$, (nは任意の自然数)も周期です．一般に，周期がTの周期関数はnTも周期としています．たくさんある周期のなかで最も短いものを基本周期といいます．「$\sin x$の基本周期は2π」です． $\sin 2x$は2πを周期としますが，それは基本周期ではありません．ただ，普通には，周期といえば基本周期のことです.

Q. 追加の課題について，周期Tのサイン関数やコサイン関数を書けませんでした.

A. sin □は□の値が2πだけ変わるともとに戻ります．$\square=ct$と置きましょう(この段階で c は単なる比例定数)．新しい変数tが T だけ変わるとき□の値が2πだけ変わるように c の値を決めるには，$2\pi=cT$すなわち$c=\frac{T}{2\pi}$としなければいけません．こうして，基本周期が T のサインやコサインは

$$\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right),\ \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

となります．t を時間を表す変数とするとき，1/T を振動数あるいは周波数ということがあり，frequency のfを使って表したり，ν（ギリシャ文字の小文字のニュー）で表したりするのが慣例です($f=\frac{1}{\mathrm{T}}$あるいは$\nu=\frac{1}{\mathrm{T}}$)．振動数の 2π倍，$\frac{2\pi}{T}$は角振動数といいω(ギリシャ文字の小文字のオメガ)で表します：

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ωを用いると基本周期を T とするサイン関数やコサイン関数は

$$\sin(\omega t),\ \cos(\omega t)$$

と表されます．またこれらの n 倍の速さで振動するサインやコサインは

$$\sin(n\omega t),\ \cos(n\omega t)$$

となります．

Q. 追加の課題について，計算の式がわかりませんでした．

A. 証明すべき式は，$\omega=\frac{2\pi}{T}$として，$\sin(n\omega t)$や$\cos(n\omega t)$の積を一周期 T にわたって積分した値についてです：

(1) $\int_0^T \sin m\omega t \,\mathrm{dt} = 0,\quad \int_0^T \cos m\omega t \,\mathrm{dt} = 0$

(2) $\int_0^T \sin m\omega t \cos n\omega t \,\mathrm{dt} = 0$

(3) $\int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t \,\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{T}}{2}\,\delta_{nm}$

(4) $\int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t \,\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{T}}{2}\,\delta_{nm}$

となります．δ_{nm}は n=m のとき 1, n≠m のとき 0 となる記号で「クロネッカのデルタ」と呼ぶものです．

【確認】 $\mathrm{T}=2\pi$とおくと，教科書の問題の式と同じになることを確かめてください

あとは，巻末の解答と同様に三角関数どうしの積を変形していけばよいのです．

例 4－7

Q.「量を計算する」とはどういう意味なのか

A.「量」は，普通は「数値」と「単位」の積で表されるものです．場合によっては，ラジアンで表す角度のように「単位」が 1（=同じ単位どうしの比）となることもあります．この問題では「量」という言葉を「数値」に置き換えて読めば分かると思います．

演習［2］

(4)

Q. 計算が分かりません．

A. 不定積分には[1](10)を利用できます．定積分としてみると，半径 a の半円の面積です．

(6)

Q. 計算が分かりません．

A. $0<a<1$, $\int\frac{dx}{x^a}=\int x^{-a}dx=\frac{1}{1-a}x^{1-a}+C$，右辺（原始関数）を微分して確かめてごらん．$a\neq1$は重要．