4章　例題

例題 4.2　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos(ax+b)dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

［解］　(1)　$t=ax+b$ とおく．$dx=\frac{1}{a}dt$ だから，

$$\int (ax+b)^n dx = \int t^n \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int t^n dt$$

$n \neq -1$ ならば，

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int t^n dt = \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}t^{n+1}+C = \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$$

$n=-1$ ならば，

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{a}\log|t|+C = \frac{1}{a}\log|ax+b|+C$$

(2)　$t=ax+b$ とおく．

$$\int \cos(ax+b)dx = \int \cos t\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int \cos t dt = \frac{1}{a}\sin t+C$$
$$= \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

(3)　$t=x+\sqrt{x^2+a^2}$ とおく．$t-x=\sqrt{x^2+a^2}$ の両辺を2乗して x を求めると，$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)$．よって，

$$\sqrt{x^2+a^2} = t-\frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t}, \quad dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt = \frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$$

であるから，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{2t}{t^2+a^2}\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t|+C$$
$$= \log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$$

(1)と(2)程度の置換積分は，同じような問題を何度も解いているうちに，ざわざ $t=ax+b$ と置き換えなくても暗算ですむようになる．▎

Q. (3)の計算が合わないので詳しく教えてください．

A. $t=x+\sqrt{x^2+a^2}$とおく．xを右辺に移項し，$t-x=\sqrt{x^2+a^2}$，この両辺を2乗してxを求めると

$(t-x)^2 = t^2-2tx+x^2 = x^2+a^2 \quad \Rightarrow \quad t^2-2tx=a^2 \quad \Rightarrow \quad 2tx=t^2-a^2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{1}{2}(t-\frac{a^2}{t})$

よって，

$\sqrt{x^2+a^2}=t-x=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-(t^2-a^2)}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t}$，　$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(t-\frac{a^2}{t}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)$ よって

$dx=\frac{dx}{dt}dt=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right)dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$

であるから

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\times\frac{dx}{dt}\times dt=\int\frac{1}{\frac{t^2+a^2}{2t}}\times\frac{t^2+a^2}{2t^2}\times dt=\int\frac{2t}{t^2+a^2}\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt=\int\frac{2t}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C$$
$$=\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$$

(3)の別解　1

準備：教科書の置換はどのようにして発見したのか，不思議な気がします．もう少し「当たり前の」置換は，分母の平方根の中を何かの2乗にして，平方根を除去することを目指すものでしょう．その第1が三角関数の利用です．

$$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

の関係があるので，$x=a\tan\theta$ とおけば（先に行って積分が実行できるか，まだ不明だが，平方根を開くことはできそう）よいと気づきます．

「a」が煩わしいので，まず$a=1$とおいて

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

の計算をします．その後に

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}} = \int \frac{\frac{1}{a}dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}} = \int \frac{ds}{\sqrt{s^2+1}}, \qquad s = \frac{x}{a}$$

により$a \neq 1$の場合の積分を求めます.

実行： さて，$x = \tan\theta$とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}} = \cos\theta$$

また

$$dx = \frac{dx}{d\theta}d\theta = \frac{d\tan\theta}{d\theta}d\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

より

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \cos\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

となります.

問題 4-2 で学ぶように，$t = \tan\frac{\theta}{2}$という置換をすれば「$\sin\theta$と$\cos\theta$の有理関数は必ず積分できる」ので，この積分も必ず計算できます． これを知らなくても，この積分であれば，$u = \sin\theta$とおくと

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \cos\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{1-\sin^2\theta} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du = \frac{1}{2}\log\frac{|1+u|}{|1-u|} + \mathrm{C}$$

となります．得られた積分をもとの変数xで表すための変形を行うと

$$\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right| = \left|\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}\right| = \left|\frac{1+\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}}{1-\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}}\right| = \left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right| = \left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}{(1+x^2)-x^2}\right| = \left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2$$

したがって

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\log\frac{|1+u|}{|1-u|} + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2 + C = \frac{1}{2} \times 2 \times \log\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + C = \log\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + C$$

です.

最後に

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{x}{a}\right| + C = \log\left|\frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)\right| + C = \log\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| - \log|a| + C$$

となり，新しい積分定数 C’の中に$\log a$を吸収すれば

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| + \mathrm{C}'$$

となります.

別解２

今度は　$t = \tan\frac{\theta}{2}$　という置換をして計算します．$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta}$，　$x = \tan\theta$までは別解 1 と同じです.

三角関数のいろいろな変換式を用い

$$\cos\theta = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\} = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dt = \frac{dt}{d\theta}d\theta = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta = \frac{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}d\theta = \frac{1 + t^2}{2}d\theta \ \Rightarrow \ d\theta = \frac{2}{1 + t^2}dt$$

となるので

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{1}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \times \frac{2}{1 + t^2}dt = \int \frac{2}{1 - t^2}dt = \int \left\{\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t}\right\}dt = \log\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C$$

あとは変数をxにもどす作業だけです.

$$x = \tan\theta = \tan 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \Rightarrow \quad x(1 - t^2) = 2t \quad \Rightarrow \quad t^2 + \frac{2}{x}\mathrm{t} - 1 = 0$$

を形式的に解くと

$$t = -\frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$$

となりますが，複合±のいずれを採用するか考えなければなりません：$x = \frac{2t}{1-t^2}$から分かるように，$x \to 0$のとき$t \to 0$の関係を満たす解を採用しなければなりません．第一項と第二項がともに負の無限大に発散するため，もし複合のうち「－」を採用すると，t が発散するため，ふさわしい解ではないことが分かります．こうして

$$t = -\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$$

となり

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \log\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C = \log\left|\frac{1 + \left(-\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)}\right| + \mathrm{C} = \log\left|\frac{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{1 + \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}\right| + C$$

対数の引数を計算すると

$$\frac{1 - \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{1 + \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \frac{x}{x} \times \frac{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{1 + \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1) - \sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{(x + 1) + \sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1) + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{\left\{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - 1\right\}\left\{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + 1\right\}}{(x + 1)^2 - (x^2 + 1)} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2 - 1}{2x} = \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1} + (x^2 + 1) - 1}{2x}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1}}{2x} = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2 + 1}}{x} = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

ですから

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \log\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C = \log\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right| + C$$

を得ます.

別解 3：

双曲線関数(2 章の演習問題[4]，3 章の演習問題[6])を用いると，ずっと楽に積分ができます.

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \qquad \frac{d}{dt}\sinh t = \cosh t, \qquad \frac{d}{dt}\cosh t = \sinh t$$

などの関係があります．三番目の関係を用いると，この被積分関数の平方根を開くことが出来ます.

実際$x = \sinh t$と置換すると

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 t}} = \frac{1}{\cosh t}$$

また

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \left(\frac{d}{dt}\sinh t\right)dt = \cosh t\, dt$$

よって

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{\cosh t} \times \cosh t\, dt = \int dt = t + C$$

変数をxに戻す作業を行うと

$$x = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \;\Rightarrow\; 2x = e^t - e^{-t} \;\Rightarrow\; 2x = e^t - \frac{1}{e^t} \;\Rightarrow\; 2x\,(e^t) = (e^t)^2 - 1$$

より，(e^t)についての 2 次方程式

$$(e^t)^2 - 2x\,(e^t) - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad e^t = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

の２つの解のうち，$e^t > 0$を満たすものは（$|x| < \sqrt{x^2+1}$だから）

$$e^t = x + \sqrt{x^2+1}$$

両辺の対数をとると

$$\log e^t = t = \log(x + \sqrt{x^2+1}) = \log|x + \sqrt{x^2+1}|$$ (絶対値記号は，中が常に正だから，本当は不要)

こうして

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = t + C = \log|x + \sqrt{x^2+1}| + C$$

を得ます.

例題 4.6　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 (x^3+1)^{1/2} x^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$

［解］ (1) $t = x^3+1$ とおく．$3x^2 dx = dt$ であり，$x=0$ では $t=1$，$x=2$ では $t=9$ だから，

$$\int_0^2 (x^3+1)^{1/2} x^2 dx = \int_1^9 t^{1/2} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\frac{2}{3} t^{3/2}\Big|_1^9$$
$$= \frac{2}{9}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{52}{9}$$

(2) 部分積分法を用いる.

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' dx$$
$$= x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{2}e^{x^2} dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \qquad \blacksquare$$

Q.(2)の計算の過程がわかりません.

A. 不定積分$\int x^3 e^{x^2} dx$の部分積分を行うため．被積分関数を $u \times v'$の形の因数分解をします．e^{x^2}を微分すると

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x\, e^{x^2} \qquad \Rightarrow \quad x\, e^{x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)'$$

となることに注目し

$$x^3 e^{x^2} = (x^2 \times x)e^{x^2} = x^2 \times \left(x e^{x^2}\right) = x^2 \times \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)'$$

そこで

$$u = x^2,\quad v' = \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' \quad\Rightarrow\quad u' = 2x,\quad v = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

とおいて部分積分を実行すると

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \quad\Rightarrow\quad \int x^3\,e^{x^2}dx = \int x^2 \times \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)'dx = x^2 \times \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right) - \int (2x)\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)dx$$

最右辺の第二項の積分は

$$\int (2x)\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)dx = \int xe^{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)'dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + \mathrm{C}'$$

以上を総合すると

$$\int x^3\,e^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C$$

あとは，定積分の計算をすれば終了です.

例題 4.7　次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$　　(3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

［解］ (1) 関数 $1/\sqrt{x}$ は $x=0$ で連続でないから，次の量を計算する.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}[2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

よって，極限が存在して，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

(2) 関数 $1/(2-x)$ は $x=2$ で連続でないから，次の量を計算する.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to+0}[-\log(2-x)]_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon + \log 2)$$

この極限は存在しないから，積分は意味をもたない.

(3) 関数 $1/\sqrt[3]{x-1}$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 3$ 内の 1 点 $x=1$ で連続でないから，次の量を計算する.

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{1+\varepsilon_2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_0^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_{1+\varepsilon_2}^3$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+0}\frac{3}{2}((-\varepsilon_1)^{2/3}-1) + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-\varepsilon_2^{2/3}) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1)$$

よって，

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1) \qquad \blacksquare$$

Q.「量を計算する」とはどんな意味ですか.

A. 「量」は，数値と（単位があるときは単位）により表される概念です．この問では，定積分（で表される数値）のこと．したがって，「次の量を計算する」を言い換えると「次の定積分が表す数値を計算により求める」となります.

Q. (3)で$1/\sqrt[3]{x-1}$ は積分区間の$0 \leq x < 1$でルートの中が負になり計算できないと思います.

A. $\sqrt[3]{x-1}$は「3 乗すると $(x-1)$になるもの」という意味です．同じものを 3 回掛けて負になる量は，負の量ですが，存在します.

Q.(3)を解説してください.

A. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$の被積分関数は，$x=1$において分母が 0 となり，発散するので，通常の積分として値を求めることができません.

・積分区間を[0,1)と(1,3]に分解します(片側開区間としたのは，関数が定義されていないため).

・各区間で 2 つの広義積分（区間の端に対する極限操作をしたとき，値が収束すれば，その極限値をもって積分の値とする）を実行します.

・２つとも積分が存在すれば（有限の値に収束すれば）よし，さもなければ積分は存在しない，ということになります.

まず，[0,1)について：

この区間内の数をaとすると，$a \neq 1$なので被積分関数は連続となり，通常の定積分

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^a (x-1)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\left[(x-1)^{1-\frac{1}{3}}\right]_0^a = \frac{3}{2}\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^a$$

は存在します（有限の確定した値となります）.

つぎに，$a \to 1 (a \neq 1)$で上の値の極限が有限の値に収束するか，調べます．このとき lim という記号を使おうとすると，ひとつ注意が必要になります．それは，$\lim_{a\to 1} f(a) = A$という記号は「1 のどちらの側からaを近づけても」A に収束する」ことを表すからです．いまは，$a < 1$という条件のもとで$a \to 1$のときに一定の値に収束すればよいので，$\lim_{a\to 1} f(a)$よりも（片側だけ考えればよいので）楽になっています．片側から迫る極限には

$$\lim_{a\to 1+0} \quad と \lim_{a\to 1-0}$$

がありました．前者は 1 より大きいところから 1 に近づく，後者は 1 より小さい 1 より小さいところから 1 に近づくことを表します.

同じく，εが 0 より大きい（$0 < \varepsilon$）ところから 0 に近づくとき

$$\lim_{\varepsilon\to +0}$$

0 より小さい（$0 > \varepsilon$）ところから 0 に近づくとき

$$\lim_{\varepsilon\to -0}$$

と表します.　こうして

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to -0} \int_0^{1+\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

などの表現が可能となります．教科書では最後の表現を採用します．積分を実行します：

$$\lim_{\varepsilon\to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to +0} \frac{3}{2}\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{3}{2}\left\{\lim_{\varepsilon\to +0}((1-\varepsilon)-1)^{\frac{2}{3}}\right\} - \frac{3}{2}(0-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left\{\lim_{\varepsilon\to +0}(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}}\right\} - \frac{3}{2}(-1)^{\frac{2}{3}}$$

$(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} = (-1)^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}} = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$，$(-1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$より，

$$\lim_{\varepsilon\to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\left\{\lim_{\varepsilon\to +0} \varepsilon^{\frac{2}{3}}\right\} - \frac{3}{2} = 0 - \frac{3}{2}$$

同様に，(1,3]の区間の積分は

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \int_a^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to +0} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

と表され，

$$\lim_{\varepsilon\to +0} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to +0} \frac{3}{2}\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_{1+\varepsilon}^3 = \frac{3}{2}(3-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to +0}\left((1+\varepsilon)-1\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to +0}(\varepsilon)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}} - 0$$

です.

どちらの区間についても広義積分が存在するので$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$および$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$という記号を使うことができ，

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right) = \frac{3}{2}\left(4^{\frac{1}{3}} - 1\right) = \frac{3}{2}\left(4^{\frac{1}{3}} - 1\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$$

を得ます.