

4章 演習問題 [2] 次の定積分を求めよ.

(1)  $\int_{-1}^1 (x^2 - x^3) dx$

偶関数+奇関数の, 原点について対称な積分区間の取り扱い:

$$\int_{-1}^1 (x^2 - x^3) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} [x^2]_0^1 = \frac{2}{3} (1^2 - 0) = \frac{2}{3}$$

(2)  $\int_{-4}^{-8} \frac{dx}{x+3}$

被積分関数は  $x = -3$  で不連続だが, この点は積分区間外:

$$\int_{-4}^{-8} \frac{dx}{x+3} = [\log|x+3|]_{-4}^{-8} = \log|-8+3| - \log|-4+3| = \log|-5| - \log|-1| = \log 5 - \log 1 = \log 5$$

(3)  $\int_1^2 \log x dx$

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = \int (x') (\log x) dx = x \log x - \int (x) (\log x)' dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$$

$$\int_1^2 \log x dx = [x \log x - x]_1^2 = (2 \log 2 - 2) - (1 \log 1 - 1) = (2 \log 2 - 2) - (1 \cdot 0 - 1) = 2 \log 2 - 1$$

(4)  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

演習[1](10)より

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= 2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = (a \cdot 0 + a^2 \arcsin 1) - (0 \cdot a + a^2 \arcsin 0) \\ &= a^2 \arcsin 1 - a^2 \arcsin 0 = a^2 \cdot \frac{\pi}{2} - a^2 \cdot 0 = \frac{\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

別解

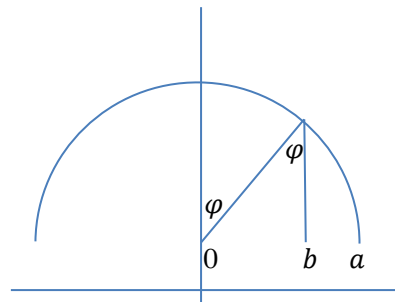
この定積分は半径  $a$  の半円の面積である. したがって  $\frac{\pi a^2}{2}$  を得る.

幾何学的に積分を求める類題  $\int_0^b \sqrt{a^2 - x^2} dx, 0 < b < a$

直角三角形の面積  $= \frac{1}{2} b \times \sqrt{a^2 - b^2}$

扇形の面積  $= \frac{1}{2} a^2 \varphi, \sin \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{b}{a}$

$$\int_0^b \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{b}{a}$$



(5)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$

置換:  $s = 1 - \sin x \Rightarrow ds = -\cos x dx \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 - \sin x}} = \int \frac{-ds}{\sqrt{s}} = -2\sqrt{s} + C (= -2\sqrt{1 - \sin x} + C)$

$x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  のとき  $s: 1 \rightarrow 0$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx = -2[\sqrt{s}]_1^0 = -2$$

もし,  $-2\sqrt{1 - \sin x}$  の形を用いて不定積分を求めるのであれば,  $x$  を変数とするときの被積分関数が積分区間の上端で発散するので

$$\lim_{b \rightarrow \pi/2} \int_0^b \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$$

が収束するという論理を貫く必要がある。もちろん、 $-2\sqrt{1 - \sin x} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$ であり、積分は存在する。

$$(6) \int_0^1 \frac{dx}{x^a} \quad (0 < a < 1)$$

積分区間の下端で被積分関数が発散するため、広義積分として計算する。

$$\int \frac{dx}{x^a} = \int x^{-a} dx = \frac{1}{1-a} x^{1-a} + C, \quad (0 < a < 1) \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} (1^{1-a} - \lim_{c \rightarrow 0} c^{1-a})$$

$0 < a < 1$ より $1 - a > 0$ ，したがって $\lim_{c \rightarrow 0} c^{1-a} = 0$ となり，広義積分が存在する：

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a}$$

$$(7) \int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{3}{2}}}$$

積分区間で $3 - x \geq 0$ だから，下端を除いて $1/(3-x)^{\frac{3}{2}}$ は有限の値となる．広義積分により計算する．

$$\int \frac{dx}{(3-x)^{\frac{3}{2}}} = \int (3-x)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{-1}{1-\frac{3}{2}} (3-x)^{1-\frac{3}{2}} + C = 2(3-x)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3-x}} + C$$

上式は下端で発散するため，この定積分は有限の値にならない．積分は存在しない．

$$(8) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{置換 : } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx = t dx, \quad x: -\infty \rightarrow \infty \Rightarrow t: 0 \rightarrow \infty$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{\frac{1}{t} dt}{t + t^{-1}} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C, \quad \text{置換後も，積分区間に関して広義積分}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = [\arctan t]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$(9) \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

被積分関数は $x = 1$ で発散するため，広義積分

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{(1-x)^2} + \lim_{b \rightarrow 1} \int_b^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

を計算する．不定積分は

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + C$$

となり， $x = 1$ で発散するため，積分は存在しない．

$$(10) \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

被積分関数は発散しないが積分区間が $\infty$ となるため広義積分を行う．まず不定積分は

$$\text{置換 : } t = \sqrt{x}, \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx, \quad \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{-t}}{t} 2t dt = 2 \int e^{-t} dt = -2e^{-t} + C$$

$$x: 1 \rightarrow \infty \Rightarrow t: 1 \rightarrow \infty, \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = [-2e^{-t}]_1^{\infty} = (-2e^{-\infty}) - (-2e^{-1}) = (-2 \cdot 0) - \left(-2 \cdot \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$