

4章 問題 4-2

1. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int (x+1)^5 dx$

$$t = x + 1, \quad dt = dx, \quad \int (x+1)^5 dx = \int t^5 dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}(x+1)^6 + C \quad (\text{第一項にも定数が含まれている})$$

(2) $\int x^2(x^3+2)^4 dx$

$$t = x^3 + 2, \quad dt = 3x^2 dx, \quad \int x^2(x^3+2)^4 dx = \int t^4 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{15}(x^3+2)^5 + C$$

(3) $\int \cos(6x+8) dx$

$$t = 6x + 8, \quad dt = 6dx, \quad \int \cos(6x+8) dx = \int \cos t \frac{dt}{6} = \frac{1}{6} \int \cos t dt = \frac{1}{6} \sin t + C = \frac{1}{6} \sin(6x+8) + C$$

(4) $\int \sin^2 x \cos x dx$

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x dx, \quad \int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

(5) $\int x \sqrt{1-2x^2} dx$

$$t = 1 - 2x^2, \quad dt = -4x dx, \quad \int x \sqrt{1-2x^2} dx = \int \sqrt{t} \left(\frac{dt}{-4} \right) = -\frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6} (1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(6) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

$$t = \frac{x}{a}, \quad dt = \frac{1}{a} dx, \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{adt}{(at)^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a} \arctan t + C = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

2. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int x \sqrt{1+x} dx$

$$u = x, \quad v' = \sqrt{1+x} \Rightarrow u' = 1, \quad v = \int \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int x \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (1+x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (1+x)^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

(2) $\int x \cos x dx$

$$u = x, \quad v' = \cos x \Rightarrow u' = 1, \quad v = \sin x$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

(3) $\int x^2 \log x dx$

$$u = \log x, \quad v' = x^2 \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2 \log x dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

(4) $\int \log(x^2+4) dx$

$$u = \log(x^2+4), \quad v' = 1 \Rightarrow u' = \frac{2x}{x^2+4}, \quad v = x$$

$$\int \log(x^2+4) dx = x \log(x^2+4) - \int \frac{2x^2}{x^2+4} dx$$

$$\int \frac{2x^2}{x^2+4} dx = \int \frac{2(x^2+4)-8}{x^2+4} dx = \int 2 dx - 8 \int \frac{1}{x^2+4} dx = 2x - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right) \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C'$$

$$\int \log(x^2+4) dx = x \log(x^2+4) - \left(2x - 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C'\right) = x \log(x^2+4) - 2x + 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$(5) \int x^2 e^x dx$$

$$u = x^2, \quad v' = e^x \Rightarrow u' = 2x, \quad v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$u = x, \quad v' = e^x \Rightarrow u' = 1, \quad v = e^x$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C'$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C') = (x^2 - 2x + 2) e^x + C$$

$$(6) \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = \arctan x - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{\frac{x}{2} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} dx, \quad u = \frac{x}{2}, \quad v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad v = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{-1}{(t+1)} = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \frac{-1}{x^2+1} - \int \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \arctan x - \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C\right) = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + C$$

部分積分法を使わない別解

$$\text{置換: } x = \tan \theta, \quad \frac{1}{x^2+1} = \cos^2 \theta, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int (\cos^2 \theta)^2 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + C = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + C = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos^2 \theta + C$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} + C = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + C$$

教科書 p.86 の「漸化式」の応用

$$J_m = \int \frac{1}{[(x-a)^2 + b^2]^m} dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow J_1 = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C, \quad J_m = \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{1}{2(m-1)} \frac{(x-a)}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} J_{m-1} \right\}$$

本問の積分は $a=0, b=1$ としたときの J_2 に一致する:

$$J_2 = \frac{1}{1^2} \left\{ \frac{1}{2(2-1)} \frac{(x-0)}{[(x-0)^2 + 1^2]^{2-1}} + \frac{2 \times 2 - 3}{2 \times 2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{1} \arctan\left(\frac{x-0}{1}\right) + C'\right) \right\} = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

3. 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{dx}{x^2-9}$$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x + 3(A-B)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow (A+B) = 0, (A-B) = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right\} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \left\{ \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+3} \right\} = \frac{1}{6} \{ \log|x-3| - \log|x+3| \} + C = \frac{1}{6} \log \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

$$(2) \int \frac{7x-1}{x^2-x-6} dx$$

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - (3A-2B)}{(x+2)(x-3)}$$

$$A+B=7, \quad 3A-2B=1 \Rightarrow A=3, B=4$$

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3}$$

$$\int \frac{7x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{3}{x+2} dx + \int \frac{4}{x-3} dx = 3 \log|x+2| + 4 \log|x-3| + C$$

$$(3) \int \frac{(x^2+2x)}{(x^2+4)(x-2)} dx$$

$$\frac{(x^2+2x)}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2}$$

C: 両辺に $(x-2)$ をかけて $x=2$ を代入:

$$C = \frac{(x^2+2x)}{(x^2+4)(x-2)} \times (x-2) \Big|_{x=2} = \frac{2^2+2 \times 2}{2^2+4} = 1$$

A: 右辺を通分すると分子には $Cx^2 = x^2$ が含まれ、左辺の x^2 の係数と一致するから、 $A=0$ となる。

($A \neq 0$ だと Ax^2 がさらに追加されることになって計算があわない)。

B: 両辺に $x=0$ を代入:

$$\frac{(0^2+2 \times 0)}{(0^2+4)(0-2)} = 0 = \frac{B}{(0^2+4)} + \frac{1}{(0-2)} = \frac{B}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow B=2$$

積分:

$$\int \frac{(x^2+2x)}{(x^2+4)(x-2)} dx = \int \frac{2}{(x^2+4)} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \log|x-2| + C$$

$$(4) \int \frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{B}{(x^2+1)^2} + \frac{D}{x^2+1}$$

右辺を通分したとき分子に x^4 が現れないようにするため、 $C=0$

同じく、分子に x^3 が現れないようにするため、 $A=0$

$$\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2} = \frac{B}{(x^2+1)^2} + \frac{D}{x^2+1} = \frac{D+B(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow B=2, D=2$$

$$\int \frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{2}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx \quad \begin{matrix} \equiv \\ \text{第一項は} \\ \text{問題 4-2(1)(6)} \end{matrix} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1} \right) + 2 \arctan x + C$$

4. $\sin x$ と $\cos x$ の有理関数を $f(\sin x, \cos x)$ とおく、変数変換して $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくことにより、 $\int f(\sin x, \cos x) dx$ は有理関数の不定積分に帰着でき必ず積分できることをしめせ。

概観

- この問の核心は「 $\sin x$ と $\cos x$ の有理関数が必ず積分できることを示せ」です。
- この課題を実行する手段として、 $t = \tan \frac{x}{2}$ という置換が指示されています。
- 「有理関数の不定積分は必ず計算できる」ことを既知としています (教科書 p.85[例 2]の直下)。

用語：

- ・変数 x の有理関数とは x の多項式の比です(教科書 p.84, 式 4.15).
- ・「 $\sin x$ の多項式」は, $a_n(\sin x)^n + a_{n-1}(\sin x)^{n-1} + \dots + a_1 \sin x + a_0$ という式のこと, 「 $\cos x$ の多項式」についても同様です(教科書の式 4.14 とは, 係数の添え字の付け方が異なります).
- ・「 $\sin x$ と $\cos x$ の多項式」は, $\sin x$ のべき乗と $\cos x$ のべき乗の積がいろいろな組み合わせで足しあわされた関数, 式で書くと

$$f(\sin x, \cos x) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_{jk} (\sin x)^j (\cos x)^k$$

というものです. たとえば $3 \sin^3 x \cos^2 x + \sin x \cos x + 2 \sin x + \cos x + 5$ というような関数です.

- ・「 $\sin x$ と $\cos x$ の有理関数」は, 「 $\sin x$ と $\cos x$ の多項式」と「 $\sin x$ と $\cos x$ の多項式」の比です. たとえば $\frac{\sin x \cos^2 x}{1 + \sin^3 x}$.
- ・「帰着する」=「帰り着く」, たどり着く, という意味です

詳細：

まず, $f(\sin x, \cos x)$ に現れるサインとコサインを t で書き直す方法：

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ だから

$$\boxed{\sin x} = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1} = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x} = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1} - 1 = \frac{2}{t^2 + 1} - 1 = \frac{1-t^2}{t^2 + 1} = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$dt = \frac{d \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{dx} dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{2} dx = \frac{1+t^2}{2} dx \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2}{1+t^2} dt}$$

こうして, 「 $\sin x$ と $\cos x$ の有理関数」 $f(\sin x, \cos x)$ の積分

$$\int f(\sin x, \cos x) dx$$

に, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ を代入して t の関数とし, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ を用いると

$$\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

となります. $f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ は, 「 $\frac{2t}{1+t^2}$ と $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ の多項式」の比なので $(1+t^2)$ の何乗かを分子と分母に掛けると, t の多項式の比となります. さらに $\frac{2}{1+t^2}$ をかけても, やはり $f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}$ は t の有理関数です. こうして, $f(\sin x, \cos x)$ は必ず積分することができることを示せました.