4 章　問題 4－5

Q. 積分値は存在しないどころか、積分は意味を持たないという答えがあるとは思いもよりませんでした

A. 教科書には確かに「積分は意味を持たない」と書いてありますが「積分値は存在しない」というのと同じです。ただし、「値を持っていないものを定積分の記号で書くということ自体に意味がない」という風に解釈すれば、積分（記号）は意味を持たないというべきなのでしょう。

1. 次の広義積分を求めよ.

(1) $\int_0^3 \frac{dx}{x^{1/4}}$

被積分関数は積分区間下端，$x=0$で発散する：

$$\int \frac{dx}{x^{1/4}} = \int x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{x^{1-\frac{1}{4}}}{1-\frac{1}{4}} + \mathrm{C} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \mathrm{C}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^{1/4}} = \lim_{a\to 0}\int_a^3 \frac{dx}{x^{1/4}} = \lim_{a\to 0}\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}\right]_a^3 = \frac{4}{3}3^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\lim_{a\to 0} a^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}3^{\frac{3}{4}} - 0 = \frac{4}{3}3^{\frac{3}{4}}$$

(2) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

被積分関数は区間内，$x=1$で発散する：

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)} + \mathrm{C}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{a\to 1}\int_0^a \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{b\to 1}\int_b^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left\{\lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}}\frac{-1}{(a-1)} - \frac{-1}{(0-1)}\right\} + \left\{\frac{-1}{3-1} - \lim_{\substack{b\to 1\\ 1<b}}\frac{-1}{(b-1)}\right\}$$

２つの極限はともに正の∞に発散し，積分は存在しない.

(3) $\int_0^1 \log x\, dx$

被積分関数は積分区間の下端で発散する：

$$\int \log x\, dx = x\log x - x + C$$

$$\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \log x\, dx = (1\log 1 - 1) - \lim_{a\to 0}(a\log a - a) = (1\cdot 0 - 1) - \left(\lim_{a\to 0} a\log a - 0\right) = -1$$

$\lim_{a\to 0} a\log a = 0$：

$$\because\ a = \frac{1}{e^t}\ とおくと\ \lim_{a\to 0} a\log a = \lim_{\mathrm{t}\to\infty}\frac{1}{e^t}\log e^t = \lim_{\mathrm{t}\to\infty}\frac{\mathrm{t}}{e^t} = \lim_{\mathrm{t}\to\infty}\frac{t}{1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\cdots} = \lim_{\mathrm{t}\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{t}+1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3!}+\cdots} = 0$$

(4) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

積分区間に関して広義積分を適用する：

$$\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} + C$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1$$

(5) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

被積分関数は発散せず，積分区間に関して広義積分を適用する：

$$\text{置換：} t = x^2 \Rightarrow \ dt = 2xdx, \ \int x\, e^{-x^2} dx = \int e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{-1}{2} \mathrm{e}^{-x^2} + C$$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx = \lim_{\mathrm{b}\to\infty} \left(\frac{-1}{2} \mathrm{e}^{-b^2}\right) - \left(\frac{-1}{2} \mathrm{e}^{-0}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(6) $\int_0^\infty e^{-x} \sin x\, dx$

$$\text{部分積分：} u = e^{-x}, v' = \sin x \Rightarrow u' = -e^{-x}, v = -\cos x$$

$$\Rightarrow \int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \cos\ x - \int (-e^{-x})\,(-\cos x\,) dx = -e^{-x} \cos\ x - \int e^{-x} \cos x\, dx$$

$$\text{同様に部分積分により} \int e^{-x} \cos x\, dx = e^{-x} \sin\ x + \int e^{-x} \sin x\, dx$$

$$\int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \cos\ x - e^{-x} \sin\ x - \int e^{-x} \sin x\, dx \Rightarrow 2 \int e^{-x} \sin x\, dx = -e^{-x} \cos\ x - e^{-x} \sin\ x$$

$$\int e^{-x} \sin x\, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos\ x + \sin\ x) + \mathrm{C}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x} (\cos\ x + \sin\ x)\right) - \left(-\frac{1}{2} \times e^{-0} \times (\cos\ 0 + \sin\ 0)\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2} \times 1 \times (1+0)\right) = \frac{1}{2}$$

2.　次の定積分を求めよ

(1) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x}$, $(\alpha > 1)$

Q. arctan $t = \frac{x}{2}$のように多価関数に置換するとき，積分区間をどのようにとったらよいか，わかりませんでした.

A. 常識的には（それが最も誤りが少ないので）主値（教科書図 2-11）をとります．主値以外のブランチを使う場合でも，積分区間の上下両端が同一のブランチに乗るようにすることが不可欠です. 　多価関数の場合ではありませんが，置換のときの積分区間のとりあつかいについて，注意を加えておきます．たとえば$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$で変数を$x = \sin t$のように置換するとき，$x\colon -1 \to +1$に対応して$t\colon -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$とするのが常識的ですが，$t\colon \frac{3\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$としても間違えではありません．ただしこのときは$\sqrt{1-x^2} = -\cos t$となること，積分区間の上下で値の上下が逆転していることに注意しなければいけません.

置換: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ すなわち $\arctan t = \frac{x}{2}$（$x = 2 \arctan t$ と同じ）

$$\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)\left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\alpha - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{\alpha(1+t^2)-(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{(\alpha+1)t^2+(\alpha-1)} = \frac{2}{\alpha+1}\int \frac{dt}{t^2+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

$$= \frac{2}{\alpha+1} \times \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{t}{\beta}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}} \arctan\left(\frac{t}{\beta}\right) + C,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$ (教科書の誤植 $a^2 \equiv \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$ ：a^2をaに訂正する)

$x: 0 \to \pi \ \Rightarrow t = \tan\left(\frac{x}{2}\right): 0 \to \infty$ となるので，x で書いたとき通常の積分だったのに，t で書くと広義積分になる：

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{2}{\alpha+1}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\left(\lim_{c\to\infty}\arctan\left(\frac{c}{\beta}\right) - \arctan\left(\frac{0}{\beta}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\left\{\frac{\pi}{2}-0\right\} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

(2) $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{ax-x^2}}dx, \quad (a>0)$

Q. 広義積分になりませんでした.

A. 置換する前の，題意の積分が広義積分です.

置換：$x = a\sin^2 t \Rightarrow \quad dx = 2a\sin t\cos t\ dt$

$$\frac{x}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{a\sin^2 t}{a\sqrt{\sin^2 t - (\sin^2 t)^2}} = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax-x^2}}dx = \int \frac{\sin t}{\cos t} \times 2a\sin t\cos t\ dt = 2a\int \sin^2 t\, dt = 2a\int \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{dt} = a\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + \mathrm{C}$$

不定積分の問題として最終結果を x で表すには

$$x = a\sin^2 t \quad \Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{x}{a}} \qquad \Rightarrow t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax-x^2}}dx = a\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + \mathrm{C} = a(t - \sin t\cos t) + C = a\left(t - \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) + C$$

$$= a\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1-\frac{x}{a}}\right) + C = a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax-x^2} + C$$

$x: 0 \to a \ \Rightarrow \mathrm{t}: 0 \to \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{ax-x^2}}dx = 2a\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = 2a \times \frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{2} = a \times \frac{\pi}{2}$$