A. 確率密度関数

- 確率密度関数：確率変数 X がxと $x+dx$の間に生じる確率が$f(x)dx$
- 確率分布関数$F(x)$：確率変数 X がx以下の値となる確率$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x')dx'$
- 全事象（「なにかは必ず起きる」こと）の確率が 1 である. $\lim_{x\to\infty}F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')dx'=1$

問題

【A1】事象が$a\le X\le b$以外に起らず，その区間のどこでも同じ確率となる分布(一様分布)の確率密度関数と確率分布関数を式で表し，グラフを描け.

【A2】確率分布関数の変曲点は，密度関数のどのような位置か.

B. 期待値$E[X]$と分散$V[X]$

- $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx$($=\mu$と書く)
- $V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\,f(x)\,dx$($=\sigma^2$と書く)

問題

【B1】次の密度分布関数$f(x)$について$E[X]$と$V[X]$を計算し，$f(x)$のグラフに期待値μの位置を記入せよ.

$$f(x)=\begin{cases}0.3\cdots 0\le x\le 1\\ 0.6\cdots 1<x\le 2\\ 0.1\cdots 2<x\le 3\end{cases}$$

【B2】$f(x)$が$x=x_m$を中心とする対称な関数のとき$E[X]=x_m$となることを，積分の式変形により示せ.

【B3】$V[X]=E[X^2]-E[X]^2$を，積分の式変形により示せ.

【B4】問 B1 と同じ$f(x)$について，$V[X]$を計算し，$f(x)$のグラフに幅σを記入せよ.

【B5】原点を中心とする幅Lの一様分布について$V[X]=\sigma^2$を計算し，密度分布の幅とσを比較せよ.

C. Xの縮尺を変えたときの，期待値と分散の変化

- 密度関数$f(x)$の形を横方向に $1/a$にする（a倍に圧縮する）. 新たな密度関数$g(x)$は$g(x)=Af(ax)$と書ける.

問題

【C1】規格化定数 A の値を定めよ.

【C2】$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$のグラフと$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$のグラフはどのような関係か，説明せよ.

【C3】$g(x)=af(ax)$の期待値$E_g[X]=\mu_g$を$f(x)$の期待値$E_f[X]=\mu_f$を用いて表せ.

【C4】$g(x)=af(ax)$の分散$V_g[X]=\sigma_g^2$を$f(x)$の分散$V_f[X]=\sigma_f^2$を用いて表せ.

【C5】$g(x)=af(ax)$の確率分布関数$G(x)$を，$f(x)$の確率分布関数$F(x)$によって表せ.

D.　2 次元の同時確率密度関数

- 同時確率密度関数$f(x,y)$　:確率変数 X がxと$x+dx$の間, かつ Y がyと $\le y+dy$の間となる確率が$f(x,y)dxdy$

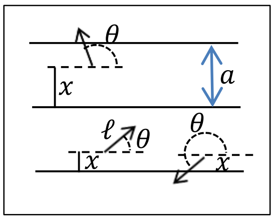
- 同時確率分布関数$F(x,y)$：確率変数 X がx以下 かつ Yがy以下となる確率，$F(x,y)=\int_{\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x',y')dx'\,dy'$
- 各事象が互いに独立なとき$f(x,y)$はそれぞれの確率密度関数の積となる：$f(x,y)=g(x)\times h(y)$
- X の周辺確率密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y')dy'$,　　「Y はどんな値でもよい」ときの確率密度
- Y の周辺確率密度：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y)dx'$,　　「X はどんな値でもよい」ときの確率密度

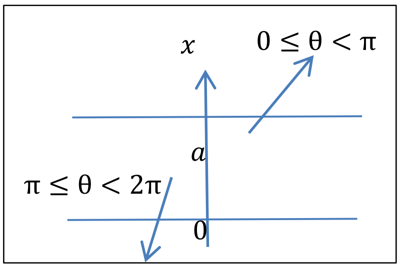
問題

【D1】X と Y が$0\le x\le a$ かつ $0\le y\le b$の範囲内では同じ確率で起き，それ以外では起きないとき（２次元の一様分布），同時確率密度関数$f(x,y)$と同時確率分布関数$F(x,y)$を求めよ．

【D2】X と Y の同時確率密度関数が$f(x,y)$のとき$a^2\le x^2+y^2\le b^2$ の範囲で事象が起きる確率 P を求める積分の式を書け．

【D3】等間隔に平行線を引いた床面に針を落とすと，針は様々な向きをもち，平行線のどれかと交わる場合もあれば，交わらない場合もある．針の長さをℓ，平行線の間隔を$a(>\ell)$とする．針の尾部と最寄り下側の平行線との距離を確率変数 X とし，平行線と針のなす角を確率変数Θとする．X とΘが互いに独立で一様分布$g(x)$および$h(\theta)$であるとして，同時確率密度関数を記せ．





【D4】D3 で，針が平行線と交わる条件は，

$$0\le \theta<\pi \;\rightarrow\quad a<x+\ell\sin\theta,\quad x<a$$
$$\pi\le \theta<2\pi \;\rightarrow\quad 0<x,\quad x+\ell\sin\theta<0$$

となる．針が平行線と交わる確率を，積分で表してから計算せよ．

【D5】X と Y が独立なとき周辺確率密度$f_X(x)$は Xの確率密度$g(x)$に一致することを積分の式変形により示せ．

【D6】X と Y が独立なとき，各変数の値が$a\le x\le b$ かつ $c\le y\le d$となる確率を積分の式で表せ．

【D7】同時密度関数が「点(0,0),(1,0),(0,1)を頂点とする三角形の内部で一様」である．X の周辺確率密度を求めよ．

E. ２次元分布の期待値と共分散

- 期待値：$E[X]=\iint_{\text{全}} xf(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty} x\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\}dx=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx=\mu_X$,　　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y')dy'$
- 期待値： $E[Y]=\iint_{\text{全}} yf(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty} y\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\}dy=\int_{-\infty}^{\infty} xf_Y(x)dx=\mu_Y$,　　$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y)dx'$
- 共分散：$Cov[X,Y]=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=\iint_{\text{全}}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)\,dxdy$
- 分散：$V[X]=Cov[X,X]=\iint_{\text{全}}(x-\mu_X)^2f(x,y)\,dxdy$,　　$V[Y]=Cov[Y,Y]=\iint_{\text{全}}(y-\mu_Y)^2f(x,y)\,dxdy$
- 相関係数：$\rho=\frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$

問題

【E1】$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$となることを，積分の式変形により示せ．

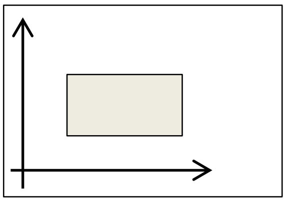
【E2】$V[X]=E[X^2]-E[X]^2$となることを，積分の式変形により示せ．

【E3】$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]$ となることを，積分の式変形により示せ．ここで$E[XY]$は，確率変数XとYの積（を新たな確率変数とし，そ）の期待値である：確率変数の値をそれぞれx,yとしたとき，$x\times y$に密度関数をかけて積分する．

【E4】$V[X+Y]=V[X]+V[Y]+2\,Cov[X,Y]$ となることを，積分の式変形により示せ．

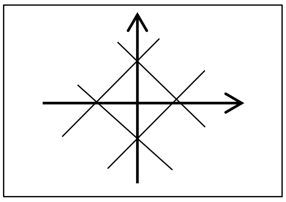
【E5】X と Y が独立なとき$E[XY]=E[X]E[Y]$となることを積分の式変形により示し，これを用いて X と Y が独立なとき共分散の値が 0（無相関という）となることを示せ．また$V[X+Y]=V[X]+V[Y]$となることを確認せよ．

【E6】(i) $x_0\le x\le x_0+a$ かつ $y_0\le y\le y_0+\mathrm{b}$の矩形領域内で事象が一様の確率でおきるとき，確率密度は



$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{ab}\cdots x_0\le x\le x_0+a \text{ かつ } y_0\le y\le y_0+\mathrm{b}\\ 0\cdots その他\end{cases}$$

となる．このとき，X と Y が独立であることを示し，共分散が 0 であることを積分計算により示せ．



(ii) 4 直線$x+y=\pm1, x-y=\pm1$で囲まれた領域だけで起きる事象のが一様の確率で起きるとき，確率密度関数を記し，X と Y は独立ではないこと，および共分散が 0 であることを積分計算により示せ．

【E7】問 D7 と同様に，同時密度関数が「点(0,0),(1,0),(0,1)を頂点とする三角形の内部で一様」である．$E[Y]$と$V[Y]$を求めよ．

F. 条件付き確率

- 確率密度が$f(x,y)$のとき，「Xがxと$x+dx$の間に生じ　かつ　Y がyと$y+dy$の間に生じる確率が $f(x,y)dxdy$
- Xがxと$x+dx$に生じたという状況下で Y がyと$y+dy$の間に生じる確率は

$$\frac{X とYが同時にそうなる確率}{Xがそうなる確率}=\frac{f(x,y)dxdy}{\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\}dx}=\frac{f(x,y)dxdy}{f_X(x)dx}$$

その確率密度は，確率を dy でわって

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy}=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

「条件付き密度関数」という．同様に

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

問題

【F1】周辺確率密度と条件付き密度の関係

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) dy$$

を示せ.

【F2】X と Y が独立でそれぞれの密度が$g(x)$,$h(y)$のとき，$h(y) = f_{Y|X}(y|x)$を示せ.

【F3】問 D7 と同様に，同時密度関数が「点(0,0),(1,0),(0,1)を頂点とする三角形の内部で一様」である．X の値がxとなるときの条件付き確率密度$f_{Y|X}(y|x)$を求めよ.

【F4】「X の（周辺）確率密度は 0 から 1 までの間で一様である．Y の確率密度は，X がxとなったとき，xから 1 までの間で一様である」という確率密度について，条件付き密度$f_{Y|X}(y|x)$を数式として定義せよ．これを用いて同時確率密度を求めよ.

G. 確率変数の和の密度関数

問題

【G1】X と Y についての同時確率密度が$f(x,y)$のとき，X+Y の値が z 以下となる確率分布関数$F(z)$を，累次積分により表せ.

【G2】問 G1 において，新たな変数の組　$\{u(x,y) = x,\quad v(x,y) = x + y\}$　を用いて，累次積分を書き直せ.

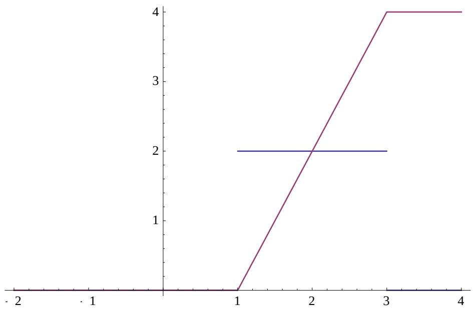
【G3】問 G1 において，分布関数の z による微分係数　$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F(z)$が確率密度を与えることを用いて，$f(z)$の積分による表式を書け．さらに，X と Y が独立で $f(x,y) = g(x)h(y)$のときの式を記せ.

略解

【A1】

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\cdots a\le x\le b\\ 0\cdots その他\end{cases},$$

$$F(x)=\begin{cases}1\cdots b<x\\ \dfrac{x-a}{b-a}\cdots a\le x\le b\\ 0\cdots x<a\end{cases}$$



【A2】

分布関数を$F(x)$，密度関数を$f(x)$とする．$F(x)$の変曲点は$\frac{d^2F(x)}{dx^2}=0$となる位置だから

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}f(x')dx'=f(x),\quad \frac{d^2F(x)}{dx^2}=\frac{df}{dx}=0$$

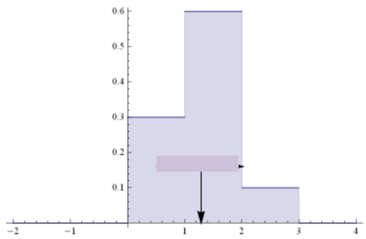
よって$f(x)$の極値を与える．$f(x)$のグラフの山が一つしかなければ，最大値を与える．

【B1】$\mu=\int_0^1 x\times 0.3\,dx+\int_1^2 x\times 0.6\,dx+\int_2^3 x\times 0.1\,dx$

$=0.3\dfrac{[x^2]_0^1}{2}+06\dfrac{[x^2]_1^2}{2}+01\dfrac{[x^2]_2^3}{2}$

$=0.15(1-0)+0.3(4-1)+0.05(9-4)=0.15+1.9+0.25$

$=1.3$



【B2】$x_m=0$のとき，$\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx$の値は（被積分関数は奇関数$x$と偶関数$f(x)$の積よって奇関数となり，積分区間が原点を中心とする対称な領域だから）0．関数の対称中心が$x_m\neq 0$のときは，座標原点をx_mの位置にとりなおせば，$E[X]$の値は新しい原点となり，古い座標ではx_mとなる．

以上を式で表すと：

$x'=x-x_m$のように座標変換し$g(x)=f(x_m+x')$と書き直す．また，$dx'=d(x-x_m)=dx$だから，

$$E[X]=\int_{x=-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx=\int_{x'=-\infty}^{\infty}(x'+x_m)\,g(x')\,dx'=\int_{x'=-\infty}^{\infty}x'\,g(x')\,dx+\int_{x'=-\infty}^{\infty}x_m g(x')\,dx$$

$$=\int_{x'=-\infty}^{\infty}x'\,g(x')\,dx+x_m\int_{x'=-\infty}^{\infty}g(x')\,dx$$

$g(x')$はx'の偶関数となるから，第１項は被積分関数$x'\,g(x')$が奇関数となり，積分の値が 0． 第 2 項は，関数gがfを横にx_mずらしただけのもので，積分区間が実数全域だから

$$\int_{x'=-\infty}^{\infty}g(x')\,dx=1$$

となることに注意し

$$E[X]=0+x_m\times 1=x_m$$

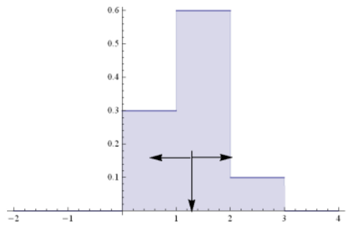
【B3】以下，$E[X]=\mu$と書く

$$V[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-2\mu x+\mu^2)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}(-2\mu x)f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx-2\mu\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx+\mu^2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx-2\mu\times\mu+\mu^2\times 1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx-\mu^2=E[X^2]-E[X]^2$$

【B4】 $\sigma^2 = \int_0^1 x^2 \times 0.3\,dx + \int_1^2 x^2 \times 0.6\,dx + \int_2^3 x^2 \times 0.1\,dx - \mu^2$



$= \frac{0.3}{3}(1-0) + \frac{0.6}{3}(8-1) + \frac{0.1}{3}(27-8) - 1.3^2$

$= 0.1 + 1.4 + 0.6 - 1.7 = 2.1 - 1{,}7 = 0.4,$

$\sigma \simeq 0.7$

【B５】$V[X] = \sigma^2 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{1}{L} dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} x^2\,dx = \frac{2}{3L}\left(\frac{L^3}{8}\right) = \frac{1}{12}L^2,\ \sigma = \frac{L}{2\sqrt{3}} < \frac{L}{2}$

密度分布の半幅の 1/√3=0.57…倍となる

【C1】$f(x)$の関数の形を横方向に$1/a$にし，面積を 1 に保つには，縦方向にa倍に引きのばす．よって$A = a$.
これを数式で表すと，$g(x)$も確率密度関数だから$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$=1 を満たす．よって

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = A\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)dx = \ A\int_{x=-\infty}^{\infty} f(ax)\frac{d(ax)}{a} = \frac{A}{a}\int_{x'=ax=-\infty}^{\infty} f(x')dx' = \frac{A}{a}\times 1 = \frac{A}{a} \Rightarrow \frac{A}{a} = 1 \therefore A = a$$

【C2】面積を保ったまま，$f(x)$を横方向に$\sqrt{2}\sigma$倍に引き延ばした（縦方向に$1/\sqrt{2}\sigma$倍に縮める）．

【C3】$f(x)$のグラフを横方向に圧縮して$1/a$倍にしたのが$g(x)$のグラフだから，期待値の位置（原点からの距離）は$1/a$倍になる．$E_g[X] = \mu_g = \frac{1}{a}\mu_f$.
これを式で表すと

$$E_g[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \times af(ax)dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(ax)}{a} \times af(ax)\frac{d(ax)}{a} = \int_{x'=ax=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right) x'f(x')dx' = \frac{1}{a}E_f[X]$$

【C4】$f(x)$のグラフを横方向に圧縮して$1/a$倍にしたのが$g(x)$のグラフだから，密度分布の幅に対応するσも$1/a$倍になる．したがって，その 2 乗の分散は$V_g[X] = \sigma_g^2 = \frac{1}{a^2}\sigma_f^2 = \frac{1}{a^2}V_f[X]$.
これを式で表すと

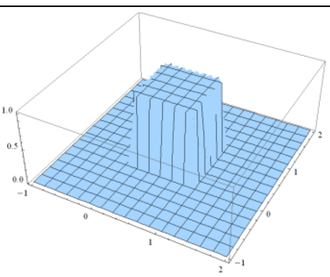
$$V_g[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,g(x)\,dx - \mu_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \times af(ax)\,dx - \mu_g^2 = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(ax)^2}{a^2} \times af(ax)\frac{d(ax)}{a} - \mu_g^2$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_{x'=ax=-\infty}^{\infty} x'^2 \times f(x')\,dx' - \frac{1}{a^2}\mu_f^2 = \frac{1}{a^2}E_f[X^2] - \frac{1}{a^2}\mu_f^2 = \frac{1}{a^2}V_f[X]$$

【C5】$f(x)$のグラフを横方向に圧縮して$1/a$倍にしたのが$g(x)$のグラフだから，$G(x)$も圧縮されて$1/a$倍になる．ただし，$\mathrm{G}(-\infty) = 0, \mathrm{G}(\infty) = 1$という制約条件は変わらないから，縦軸方向への変化は起きない．
これを式で表すと

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x')dx' = \int_{x'=-\infty}^{x} af(ax')dx' = \int_{x'=-\infty}^{x} f(ax')d(ax') = \int_{x''=ax'=-\infty}^{ax} f(x'')dx'' = F(ax)$$

【D1】与えられた領域内で$f(x,\mathrm{y}) = c =$ 一定であるから，この一定値を求めればよい．それには規格化すなわち



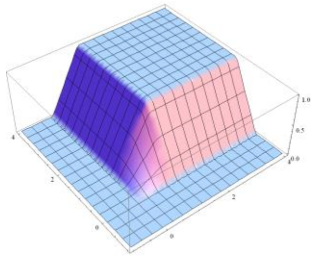
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y')dx'\,dy' = \int_0^{\mathrm{b}}\int_0^{\mathrm{a}} c \times dx'\,dy' = c \times ab = 1\ \therefore c = \frac{1}{ab}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{ab} \cdots 0 \le x \le a, 0 \le y \le b \\ \quad 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

$0 \le x \le a$ かつ $0 \le y \le b$の範囲で

$$F(x,y) = \int_{\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x',y')dx'\,dy' = \int_0^{y}\int_0^{x} \frac{1}{ab}dx'\,dy' = \frac{1}{ab}\int_0^{y}\int_0^{x} dx'\,dy' = \frac{xy}{ab}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{ab}\cdots 0\le x\le a \quad and \quad 0\le y\le b\\ \frac{x}{a}\cdots\cdots 0\le x\le a \quad and \quad b\le y\\ \frac{y}{b}\cdots\cdots a\le x \quad and \quad 0\le y\le b\\ 0\cdots \mathrm{x}<0 \ \ \mathrm{or\,y}<0\\ 1\cdots a\le x \quad and \quad b\le y\end{cases}$$



【D2】$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ によって極座標に変数変換するとき$f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta\,)=f(r,\theta)$とすると(中辺は「$f(x,y)$の$x$に$r\cos\theta$ を代入する，etc」という意味だが，最右辺は「$f(x,y)$のxにrを代入する, etc」という意味ではなく中辺の代入作業により出来上がったrと θ の関数という意味．$f(x,y)$と内容的に同じものを指すので関数の記号をfのまま残した．)

$$P=\iint_{a^2\le x^2+y^2\le b^2} f(x',y')\,dx'dy'=\int_a^b\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\,r\,d\theta dr$$

【D3】

$$f(x,\theta)=g(x)\times h(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{a}\times\frac{1}{2\pi}\cdots 0\le x\le a \ \ and \ \ 0\le\theta<2\pi\\ 0\cdots \text{その他}\end{cases}$$

【D4】

$$\int_0^{\pi}\int_{a-\ell\sin\theta}^{a}\frac{1}{2\pi a}dxd\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{-\ell\sin\theta}\frac{1}{2\pi a}dxd\theta=\frac{2\ell}{\pi a}$$

【D5】

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y')dy'=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)h(y')dy'=g(x)\int_{-\infty}^{\infty}h(y')dy'=g(x)\times 1=g(x)$$

【D6】

$$\int_a^b\int_c^d g(x)h(y)dydx \ =\int_a^b g(x')dx'\times\int_c^d h(y')dy'$$

【D7】

$$f(x,y)=\begin{cases}2\cdots 0\le x, 0\le y, x+y<1\\ 0\cdots \text{その他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{-x+1}2\,dy=2(1-x)\cdots 0\le x\le 1\\ 0\cdots \text{その他}\end{cases}$$

【E1】

$$E[X+Y]=\iint_{\text{全}}(x+y)\,f(x,y)dxdy=\iint_{\text{全}}\{xf(x,y)+yf(x,y)\}\,dxdy=\iint_{\text{全}}x\,f(x,y)dxdy+\iint_{\text{全}}y\,f(x,y)dxdy=$$

$$=E[X]+E[Y]$$

【E2】

$$V[X]=\iint_{\text{全}}(x-\mu_X)^2 f(x,y)\,dxdy=\iint_{\text{全}}x^2 f(x,y)\,dxdy-2\mu_X\iint_{\text{全}}xf(x,y)\,dxdy+\iint_{\text{全}}{\mu_X}^2 f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint_{\text{全}}x^2 f(x,y)\,dxdy-2\mu_X\times\mu_X+{\mu_X}^2\times 1=E[X^2]-{\mu_X}^2=\ E[X^2]-E[X]^2$$

同じ内容だが，積分の式変形を用いずに（$E[\quad]$を演算記号と考え，積分の線形性から $E[\quad]$の線形性を確認して）直接に示すのが普通のやりかた：

$$V[X]=Cov[X,X]=E[(X-\mu_X)^2]=E[X^2-2\mu_X X+\mu_X^2]=E[X^2]-2\mu_X E[X]+\mu_X^2 E[1]$$
$$=E[X^2]-2\mu_X\times\mu_X+\mu_X^2\times 1=E[X^2]-{\mu_X}^2=E[X^2]-E[X]^2$$
$$\because\ E[1]=\iint_{全}1\times f(x,y)\,dxdy=\iint_{全}f(x,y)\,dxdy=1$$

【E3】

$$Cov[X,Y]=\iint_{全}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)\,dxdy=\iint_{全}\{xy-\mu_X y-\mu_Y x+\mu_X\mu_Y\}f(x,y)\,dxdy$$
$$=E[XY]-\mu_X E[Y]-\mu_Y E[X]+\mu_X\mu_Y E[1]=E[XY]-E[X]E[Y]$$

問 E2 と同様に$Cov[X,Y]=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E[XY-\mu_X Y-\mu_Y X+\mu_X\mu_Y]=\cdots$とするのが普通.

【E4】

$$V[X+Y]=\iint_{全}\{(x-\mu_X)+(y-\mu_Y)\}^2 f(x,y)\,dxdy$$
$$=\iint_{全}\{x-\mu_X\}^2 f(x,y)\,dxdy+2\iint_{全}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)\,dxdy+\iint_{全}\{y-\mu_Y\}^2 f(x,y)\,dxdy$$
$$=V[X]+2\,Cov[X,Y]+V[Y]$$

問 E2 と同様に$V[X+Y]=E[(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2]-E[X+Y]^2=\cdots$とするのが普通.

【E5】独立ならば$f(x,y)=g(x)h(y)$と書ける．このとき

$$E[XY]=\iint_{全}xyf(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)dx\times\int_{-\infty}^{\infty}yh(y)\,dy=E[X]E[Y]$$

となる．これより，

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=0$$

さらに問 E4 より

$$V[X+Y]=V[X]+V[Y]+2\,Cov[X,Y]=V[X]+V[Y]$$

となる．独立ならば無相関である．逆は必ずしも成り立たない.

【E6】(i)確率密度$f(x,y)=\frac{1}{ab}$が，$g(x)=\frac{1}{a}$と$h(y)=\frac{1}{b}$の積として与えられるから独立.

$$\mu_x=\frac{1}{ab}\int_{x_0}^{x_0+a}x\,dx\int_{y_0}^{y_0+b}dy=\frac{1}{ab}\int_{x_0}^{x_0+a}x\,dx\times b=\frac{1}{a}\frac{(\text{上底}+\text{下底})}{2}\times\text{高さ}=\frac{1}{a}\frac{(x_0+a+x_0)}{2}\times(x_0+a-x_0)=x_0+\frac{a}{2}$$

$$Cov[X,Y]=\iint_{a\times bの矩形}\left(x-(x_0+\frac{a}{2})\right)\left(y-(y_0+\frac{b}{2})\right)\frac{1}{ab}\,dxdy=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x'dx'\times\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}y'\,dy'=0\times 0=0$$

(ii) たとえば，X の値が 0 となるときは Y の値が±1 の間となるが，X の値が 1/2 となるときは Y の値が±1/2 の間になるなど，互いに独立ではない.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdots 4\text{ 点}(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\text{を頂点とする正方形内部}\\ 0\cdots\text{その他}\end{cases}$$

$$\mu_X=\int_{-1}^{0}dy\int_{-(y+1)}^{y+1}dx\,\{xf(x,y)\}+\int_{0}^{1}dy\int_{y-1}^{-(y-1)}dx\,\{xf(x,y)\}=\int_{-1}^{0}dy\,\{0\}+\int_{0}^{1}dy\,\{0\}=0\ \text{同様に}\mu_Y=0$$

本当は積分をしなくても，各変数の確率密度関数が一様（積分領域が原点について対称だから，偶関数）であることを考えれば各変数の期待値は 0 となることが分かる.

$$E[XY] = \int_{-1}^{0} dy \int_{-(y+1)}^{y+1} dx\,\{xyf(x,y)\} + \int_{0}^{1} dy \int_{y-1}^{-(y-1)} dx\,\{xyf(x,y)\}$$

$$= \int_{-1}^{0} dy\,\{y\} \int_{-(y+1)}^{y+1} dx\,\{xf(x,y)\} + \int_{0}^{1} dy\,\{y\} \int_{y-1}^{-(y-1)} dx\,\{xf(x,y)\} = 0$$

よって，$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0 - 0 \times 0 = 0$

変数が独立でなくても共分散は 0 となる．共分散が 0 であっても独立とはかぎらない．

【E7】

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 \cdots 0 \le x, 0 \le y, x+y < 1 \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{0}^{-y+1} 2\,dx = 2(1-y) \cdots 0 \le y \le 1 \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} y\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\}dy = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,dy = \int_{0}^{1} 2y(1-y)\,dy = \frac{1}{3}$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_{0}^{1} 2y^2(1-y)\,dy = \frac{1}{6}$$

$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

【F1】左辺を，条件付き密度の定義に従って具体的に書いて計算する：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = f_X(x)$$

【F2】

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{g(x) \times h(y)}{g(x)} = h(y)$$

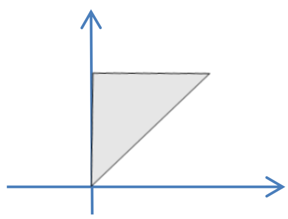
【F3】

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x} \cdots 0 \le y \le 1-x \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

【F4】

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \cdots x \le y \le 1 \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

$$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) \times f_X(x) = f_{Y|X}(y|x) \times 1 = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \cdots 0 \le x \le 1, x \le y \le 1 \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

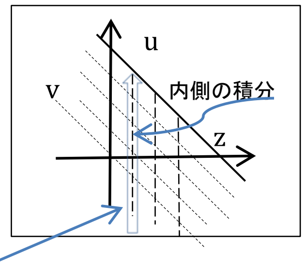


【G1】$A = \{(x,y)|x+y \le z\}$として

$$F(z) = \iint_A f(x,y)dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\}dx$$

【G2】

$\{x = u\,,\quad y = v - u\}\,,\quad f(x, y) = f(u, v - u),$



ヤコビアン $|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1,$

$\mathrm{A} = \{(u, v)|v \le z, -\infty < u < \infty\}$
新しい変数を直交座標にすれば，u軸方向は変数の全域，v軸方向は$v < z$となり，軸に平行な辺をもつ矩形領域の両側と下側を無限大に広げたものとなる．したがって，累次積分を実行する順序を変えても同じ値を得る：

$$F(z) = \iint_A f(x, y)dx\,dy = \iint_A f(u, v - u)\,J\,du\,dv = \int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{z} f(u, v - u)\,dv\}du = \int_{-\infty}^{z}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v - u)\,du\}dv$$

【G3】

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}F(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\int_{-\infty}^{z}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v - u)\,du\}dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, z - u)\,du$$

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)h(z - u)du$、この積分を$g$と h の「たたみ込み積分」という．