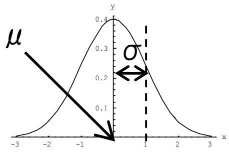
A. 正規分布と 2 項分布

- 正規分布の確率密度関数（平均μ，分散 σ^2）：

  $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\;e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

  $\mu-\sigma\le x\le\mu+\sigma$が実現する確率が約 2/3



- 中心極限定理：互いに無関係かつランダムに生じる小さな値の総和は正規分布になる

以下の問で，二項分布の総数が非常に大きいとき，分布の中央付近は正規分布の形になることを，比較的容易な計算で確かめる．中心極限定理は，中央付近だけでなく，全域で正規分布の形になることを保証している．

N枚の硬貨を投げる．

k番目の硬貨 1 枚が表(=1)と裏(= -1)になる確率は等しく 1/2．この事象を表す確率変数を$X_k(k=1,2,\cdots,N)$とすると，

$X_k=\{-1,1\}, p_k(-1)=\frac{1}{2}, p_k(1)=\frac{1}{2}$,

平均値：　$\mu_k=1\times p_k(1)+(-1)\times p_k(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$,

分散：　$\sigma_k^2=(1)^2\times p_k(1)+(-1)^2\times p_k(-1)-\mu_k^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

N枚全部の裏(-1)と表(1)の「総和」もランダムに変動するが，裏表ほぼ同数(N が偶数のとき和が 0)が最も多いだろう．総和を表現する確率変数は

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_N,\quad X=\{-N,\cdots,N\}$$

Xの値がxとなるのは，表が$\frac{N+x}{2}$個，裏が$\frac{N-x}{2}$個のときである．その場合の数は$\frac{\mathrm{N}!}{\left(\frac{N+x}{2}\right)!\left(\frac{N-x}{2}\right)!}$である．したがってその確率は

$$P_X(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^N\frac{\mathrm{N}!}{\left(\frac{N+x}{2}\right)!\left(\frac{N-x}{2}\right)!}$$

Nが非常に大きく，$\frac{x}{N}\ll 1$のとき$P_X(x)$が正規分布（平均値 0，分散 N）で近似できることを学ぶ（中心極限定理の応用例）．

問題

【A1】 上で与えた$P_X(x)$を確認せよ．．

【A2】Nが大きなとき，$\log N!=\log 1+\log 2+\cdots+\log N$の値を$\int_1^N\log x\,dx$で近似的に表す．$\int_1^N\log x\,dx$を計算し，$\log N!\simeq N\log N-N$を導け（スターリングの公式の簡易版）．対数の底は e である（自然対数）．

【A3】 $\log N!\simeq N\log N-N$を用い，$P_X(x)$の対数が

$$\log P_X(x)\simeq-\left(\frac{N+x}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{N}\right)-\left(\frac{N-x}{2}\right)\log\left(1-\frac{x}{N}\right)$$

となることを確認せよ．

【A4】$\log(1+x)$のマクローリン展開から，$1\gg|x|$のとき$\log(1+x)\simeq x-\frac{x^2}{2}$となることを示せ．

【A5】$\frac{x}{N}\ll 1$を考慮して$\log\left(1\pm\frac{x}{N}\right)$を$x$の 2 次関数で近似すると，

$$\log P_X(x)\simeq-\frac{x^2}{2N}\quad\therefore\quad P_X(x)\simeq e^{-\frac{x^2}{2N}}$$

となることを確認せよ．

【A6】独立な確率変数X_jとX_kの和(X_j+X_k)の分散は，それぞれの分散の和$\sigma_j^2+\sigma_k^2$となる．$X=X_1+X_2+\cdots+X_N$の分散を求め，[A5]で得た正規分布の分散と比較せよ．

B. 正規分布(normal distribution)

- 確率密度関数が $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$ であるとき，確率変数 X は「平均値μ，分散σ^2の正規分布，N(μ,σ)に従う」という．e^{-x^2}の関数形をガウス型関数ともいう．

問題

【B1】 次の関数のグラフの概形を$-4\le x\le 4$の範囲で描け．

参照する数値： $e\simeq 2.7,\ e^{-0.25}\simeq 0.78,\ e^{-1}=0.37, e^{-2.25}\simeq 0.11, e^{-4}$ =0.018

(1) $f(x)=e^{-x^2}$ (2) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}$ (4) $f(x)=xe^{-x^2}$ (5) $f(x)=x^2e^{-x^2}$

【B2】次の定積分を計算せよ．

(1) $\int_a^b e^{cx}\,dx$ (2) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ (3) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ (4) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

(5) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$ (6) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ (7) $\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$

【B3】次の定積分を計算せよ（前問の結果を用いて置換積分）．σ(シグマ)と μ(ミュー)は定数．

(1) $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}dx$ (2) $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}dx$ (3) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}dx$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}dx$ (5) $\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}dx$ (6) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty (x-\mu)^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}dx$

【B4】$e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}$のグラフは，$e^{-x^2}$のグラフを横に何倍に拡大したものか．

【B5】$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}dx=1$を示せ．これにより，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}$が規格化された確率密度となることが保証される．

【B6】 $e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$と$e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}$の下側の面積が等しい理由は何か．

【B7】$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$の期待値が$\mu$であることを示せ．

【B8】$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$の分散が$\sigma^2$であることを示せ．

C. 二次元正規分布

確率変数 X と Y が独立で，それぞれ正規分布に従うとき，密度関数は

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2{\sigma_x}^2}}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2{\sigma_y}^2}}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2{\sigma_x}^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2{\sigma_y}^2}\right\}}$$

さらに一般的に，二次元正規分布の密度関数は

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}-\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right)}$$

である.

問題

【C1】次の定積分を計算せよ（累次積分のそれぞれの段階に前問の結果を用いよ）.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(Cx+Dy)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(Cx+Dy)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_a)^2}{A^2}+\frac{(y-m_b)^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}xye^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}xye^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_a)^2}{A^2}+\frac{(y-m_b)^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_b)^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_a)^2}{A^2}+\frac{(y-m_b)^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$

【C2】$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}$という関数形を，より一般的な形$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}$にして問 4 の様々な積分の値を求めたい．そこで，新しい変数を

$$u(x,y)=\alpha\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right),\qquad v(x,y)=\beta\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)$$

とおき$u^2+v^2=(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{x}{A}\right)^2-2(\alpha^2-\beta^2)\left(\frac{x}{A}\right)\left(\frac{y}{B}\right)+(\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{y}{B}\right)^2=\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)$が成り立つように$\alpha$と$\beta$を決める．すなわち

$$\alpha^2+\beta^2=1,\qquad \alpha^2-\beta^2=C$$

である．このとき

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

(0) |C|<1 を確かめよ．$\alpha\beta=\frac{1}{2}\sqrt{1-C^2}$を確かめよ

(1) 積分変数をu,vに変えるとき，$dxdy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$と置き換える．ヤコビアンの値

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}$$

を確かめよ．ヒント：$u(x,y)=\alpha\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right),v(x,y)=\beta\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)$から$x(u,v),y(u,v)$の式を導く.

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\,dy=\frac{2\pi AB}{\sqrt{1-C^2}}$$

を確かめよ．ヒント：u,vを用いて定積分を計算.

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}\,dx\,dy = 0$$

を確かめよ．ヒント：u, vを用いて定積分を計算.

(4)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}\,dx\,dy = \frac{2\pi A^3 B}{\sqrt{1-C^2}^3}$$

を確かめよ．ヒント：u, vを用いて定積分を計算.

(5)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}\,dx\,dy = \frac{2\pi A^2 B^2 C}{\sqrt{1-C^2}^3}$$

を確かめよ．ヒント：u, vを用いて定積分を計算.

【C3】$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}$について，各変数の期待値と分散および共分散を計算せよ.

【C4】密度関数

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}xy+\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)}$$

が規格化されている（全平面で積分すると 1 になる）ことを確認せよ.

ヒント：【C2】(2)において$A=\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}, B=\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}, C=\rho$を確認せよ.

【C5】【C4】の密度関数について$E[x]=E[y]=0$を確認せよ．ヒント：【C2】(3)

【C6】【C4】の密度関数について$V[x]=E[x^2]-E[x]=\sigma_x^2$を確認せよ．ヒント【C2】(4)

【C7】【C4】の密度関数について$Cov[x,y]=E[xy]-E[x]E[y]=\rho\sigma_x\sigma_y$を確認せよ．ヒント【C2】(5)

以上

略解は次ページから

略解

【A1】N 枚を一列に並べたとき，どれかひとつの裏表のパターンが現れる確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^N$となる.

表の枚数がr枚（裏が$N-r$枚）となるパターンは$\frac{N!}{r!(N-r)!}$通りある.

表を 1，裏を-1 としたとき，このパターンに対する 1 とー1 の総和の値xは，$x = 1 \times r + (-1) \times (N-r) = 2r - N$となるので，$r = \frac{N+x}{2}$. したがって$N - r = \frac{N-x}{2}$.
これらを代入すると題意の$P_X(x)$の式に一致する.

【A2】

$$\int \log x\, dx = \int 1 \times \log x\, dx = \int (x)' \times \log x\, dx = (x) \times \log x - \int (x) \times (\log x)' dx = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x$$

$$\int_1^N \log x\, dx = (N \log N - N) - (1 \times \log 1 - 1\,) = (N \log N - N) - (1 \times 0 - 1\,) = N \log N - N + 1 \simeq N \log N - N$$

最後の近似は，N が 1 より非常に大きいとして 1 を無視した．こうして，$\log N! \simeq N \log N - N$.

【A3】

$$\log P_X(x) \simeq -N \log 2 + \{N \log N - N\,\} - \left\{\left(\frac{N+x}{2}\right) \log\left(\frac{N+x}{2}\right) - \left(\frac{N+x}{2}\right)\right\} - \left\{\left(\frac{N-x}{2}\right) \log\left(\frac{N-x}{2}\right) - \left(\frac{N-x}{2}\right)\right\}$$

$$= \left\{N \log\left(\frac{N}{2}\right) - N\right\} - \left\{\left(\frac{N+x}{2}\right) \log \frac{N}{2} + \left(\frac{N+x}{2}\right) \log\left(1 + \frac{x}{N}\right) - \left(\frac{N+x}{2}\right)\right\} - \{x\text{を}(-x)\text{に置き換えた項}\}$$

$$= \left\{N \log\left(\frac{N}{2}\right) - N\right\} - \left\{\frac{N}{2} \log \frac{N}{2} + \frac{x}{2} \log N - \frac{x}{2} \log 2 + \left(\frac{N+x}{2}\right) \log\left(1 + \frac{x}{N}\right) - \frac{N}{2} - \frac{x}{2}\right\} - \{\cdots\}$$

$$= \left\{N \log\left(\frac{N}{2}\right) - N\right\} - 2 \times \left\{\frac{N}{2}\left(\log \frac{N}{2}\right) - \frac{N}{2}\right\} - \left(\frac{N+x}{2}\right) \log\left(1 + \frac{x}{N}\right) - \left(\frac{N-x}{2}\right) \log\left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

$$= -\left(\frac{N+x}{2}\right) \log\left(1 + \frac{x}{N}\right) - \left(\frac{N-x}{2}\right) \log\left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

【A4】

$x = 0$で必要な回数だけ微分できる関数では，$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

$f(x) = \log(1+x)$とすると$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, etc$， $\log(1+x) = \log 0 + \left(\frac{1}{1+0}\right)x - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{(1+0)^2}\right)x^2 + \cdots$

$\log(1+x)$を 2 次関数で近似すると　$\log(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2}$

【A5】

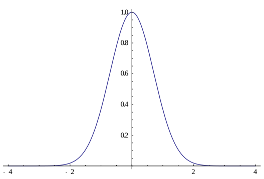
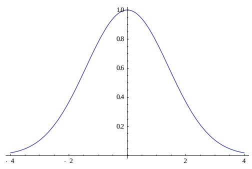
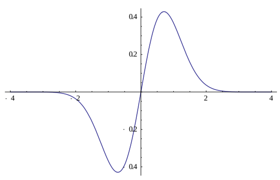
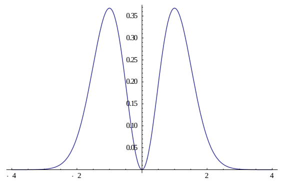
$$\log P_X(x) \simeq -\left(\frac{N+x}{2}\right) \log\left(1 + \frac{x}{N}\right) - \left(\frac{N-x}{2}\right) \log\left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

$$\simeq -\left(\frac{N+x}{2}\right)\left(\frac{x}{N} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{N^2}\right) - \left(\frac{N-x}{2}\right)\left(-\frac{x}{N} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{N^2}\right) = -\frac{x^2}{2N}$$

【A6】

$\sigma_X^2 = N\sigma^2 = N$, 一方$P_X(x) \simeq e^{-\frac{x^2}{2N}}$を正規分布の正確な関数形$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X}\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}}$と比較すると$\sigma_X^2 = N$となり, 一致する.

【B1】

(1)  (2)  (3)  (4) 

【B2】

(1) $\frac{e^{bc}-e^{ac}}{c}$　(2) 1　(3) $\sqrt{\pi}$　(4) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　(5) 0　(6) $\frac{1}{2}$　(7) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

● $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$とおく．定積分だから$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$と書いてもよい．そこで

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\iint_{\text{全平面}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy=\iint_{\text{全平面}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

極座標に変換する：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$， 積分領域は$0\le r<\infty$, $0\le\theta<2\pi$, ヤコビアンは$|J|$=r だから

$$I^2=\iint_{\text{全平面}} e^{-r^2} r\,drd\theta=\int_0^{2\pi} d\theta\int_{r=0}^{\infty} re^{-r^2}\,dr=2\pi\int_{t=0}^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{2}=\pi[-e^{-t}]_0^{\infty}=\pi,\quad I=\sqrt{\pi}$$

● xe^{-x^2}は奇関数なので，原点について対称な区間$[-\infty,\infty]$での積分は０となる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx=0$$

● $\frac{d}{dx}e^{-x^2}=-2xe^{-x^2}$より

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} x(xe^{-x^2})\,dx=\frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)dx=\frac{-1}{2}\left\{\left[xe^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right\}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\because \lim_{x\to\infty} x\,e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots}=0$$

【B3】

(1) $\sqrt{2\pi}\,\sigma$　(2) $\sqrt{2\pi}\,\sigma$　(3) 0　(4) μ　(5) $\sqrt{2\pi}\,\sigma^3$　(6) σ^2

【B4】$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$だから，$e^{-x^2}$を横に$\sqrt{2}\,\sigma$倍すると$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$のグラフと重なる.

【B5】問 B4 より，e^{-x^2}の下側の面積$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$を$\sqrt{2}\,\sigma$倍すると，$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$の下側の面積$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$となる．式で表すと

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=\sqrt{2}\,\sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}=\sqrt{2}\,\sigma\times\sqrt{\pi}=\sqrt{2\pi}\,\sigma\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=1$$

【B6】グラフを横に平行移動し変数を$x\to x'=x-\mu$に変えても，x'の積分区間の両端が正負無限大で，xの区間と同じだから.

【B7】$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$は，直線$x=\mu$について対称だから．$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$を右に$\mu$だけ平行移動した関数だから．計算は：

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \int_{t=(x-\mu)=-\infty}^{\infty}(t+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt}^{\text{奇関数}} + \mu\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt}_{1} = 0+\mu$$

【B8】$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$を右に$\mu$だけずらすと$e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$となるので，グラフの幅（σ）は$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$のと$e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$とで等しくなる.

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{t=(x-\mu)=-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} t\times te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} t\times(-\sigma^2)\frac{d}{dt}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt\right\} = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left\{\left[t\times\left(e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt\right\}$$

$$= \sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = \sigma^2$$

【C1】

(1) $\int_a^b\left\{\int_c^d e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy = \int_a^b e^{-\frac{y^2}{2B^2}}dy\times\int_c^d e^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx$ より，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx = \sqrt{2\pi}\ A\times\sqrt{2\pi}\ B = 2\pi AB$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(Cx+Dy)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(Cx)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(Dy)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}(Cx)e^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx + \int_{-\infty}^{\infty}(Dy)e^{-\frac{y^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx = 0+0=0$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(Cx+Dy)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_a)^2}{A^2}+\frac{(y-m_b)^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(Cx)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_a)^2}{A^2}+\frac{(y-m_b)^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(Dy)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_a)^2}{A^2}+\frac{(y-m_b)^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-m_b)^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}(Cx)e^{-\frac{(x-m_a)^2}{2A^2}}dx + \int_{-\infty}^{\infty}(Dy)e^{-\frac{(y-m_b)^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-m_a)^2}{2A^2}}dx$$

$$= \sqrt{2\pi}\ B\times\int_{-\infty}^{\infty}(Cx)e^{-\frac{(x-m_a)^2}{2A^2}}dx + \int_{-\infty}^{\infty}(Dy)e^{-\frac{(y-m_b)^2}{2B^2}}dy\times\sqrt{2\pi}\ A = 2\pi AB(Cm_a+Dm_b)$$

(4)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}xye^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{y^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx = 0\times 0 = 0$$

(5)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}xye^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_a)^2}{A^2}+\frac{(y-m_b)^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{(y-m_b)^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-m_a)^2}{2A^2}}dx = 2\pi ABm_am_b$$

(6)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2A^2}}dx=2\pi A^3B$$

(7)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_b)^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_a)^2}{A^2}+\frac{(y-m_b)^2}{B^2}\right)}dx\right\}dy=\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_b)^2e^{-\frac{(y-m_b)^2}{2B^2}}dy\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-m_a)^2}{2A^2}}dx=2\pi AB^3$$

【C2】

(0)　略

(1)

$$x=\frac{A}{2\alpha}u+\frac{A}{2\beta}v,\quad y=\ -\frac{B}{2\alpha}u+\frac{B}{2\beta}v\rightarrow\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{vmatrix}\frac{A}{2\alpha} & \frac{A}{2\beta}\\ -\frac{B}{2\alpha} & \frac{B}{2\beta}\end{vmatrix}\right|=\frac{AB}{2\alpha\beta}=\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}$$

(2) xy 平面上では「u =一定」が傾き $+\frac{B}{A}$ の直線を．「$v=$一定」が傾き -$\frac{B}{A}$ の直線を表す．2 直線の交点が xy 平面の全域を移動するために, uとvは$-\infty<u<\infty$, $-\infty<v<\infty$ すなわちuv平面の全域を網羅する必要がある．こうしてu,vの積分領域が定まる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\ dv$$

$$=\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}du\,dv=\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}\times2\pi=\frac{2\pi\ AB}{\sqrt{1-C^2}}$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A}{2\alpha}u+\frac{A}{2\beta}v\right)e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\ dv$$

$$=\frac{\mathrm{A}}{2\alpha}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}du\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv+\frac{A}{2\beta}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\times\int_{-\infty}^{\infty}ve^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

$$=\frac{\mathrm{A}}{2\alpha}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|0\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv+\frac{A}{2\beta}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\times0=0$$

(4)

$$x^2=\left(\frac{A}{2\alpha}u+\frac{A}{2\beta}v\right)^2=\left(\frac{A}{2\alpha}\right)^2u^2+\left(\frac{A}{2\beta}\right)^2v^2+\frac{A^2}{2\alpha\beta}uv\text{を用いると}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{A}{2\alpha}\right)^2u^2+\left(\frac{A}{2\beta}\right)^2v^2+\frac{A^2}{2\alpha\beta}uv\right\}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\ dv$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}uve^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}du\ dv=0\text{：参照 4(5) および}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}du\ dv=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v^2e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}du\ dv=2\pi\text{：参照 4(6)を用いると}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)}dx\,dy=2\pi\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\left\{\left(\frac{A}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{A}{2\beta}\right)^2\right\}=2\pi\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}\frac{A^2}{4}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

$$=2\pi\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}\frac{A^2}{4}\frac{4}{(1-C^2)}=\frac{2\pi A^3B}{\sqrt{1-C^2}^3}$$

(5)

$$xy=\left(\frac{A}{2\alpha}u+\frac{A}{2\beta}v\right)\left(-\frac{B}{2\alpha}u+\frac{B}{2\beta}v\right)=\frac{AB}{4}\left(-\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{v^2}{\beta^2}\right)\text{を用いると}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A^2}-2C\frac{xy}{AB}+\frac{y^2}{B^2}\right)} dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{AB}{4}\left(-\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{v^2}{\beta^2}\right)\right\} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\ dv$$

$$=\frac{AB}{4}\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}2\pi\left\{-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right\}=\frac{AB}{4}\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}2\pi\left\{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\right\}=\frac{AB}{4}\frac{AB}{\sqrt{1-C^2}}2\pi\frac{(-C)\times 4}{(1-C^2)}=-\frac{2\pi A^2B^2C}{\sqrt{1-C^2}^3}$$

【C3】

$$E[X]=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint_{全} x\, e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}dxdy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}\right\}}dx\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}dy=\mu_x$$

$E[X]=\mu_y$

$$V[X]=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint_{全}(x-\mu_x)^2\, e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}dxdy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}\right\}}dx\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}dy=\sigma_x^2\quad\times 1=\sigma_x^2$$

$V[X]=\sigma_Y^2$

$$Cov[X,Y]=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint_{全}(x-\mu_x)(y-\mu_y)\, e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}dxdy$$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)e^{-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}\right\}}dx\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_y)e^{-\left\{\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}dy=0$:独立だから０となるのが当然.

【C4】～【C7】めんどうなだけで難しくはない．省略

以上