例題 6.4

Q. a→∞としたとき x と y の積分領域が－∞から∞となるのは何故ですか.

A. 積分領域が$R: 0 \leq x^2+y^2 \leq a^2$，すなわち原点からの距離の 2 乗が 0 と$a^2$の間にあるすべての点の集まりとなっていますから，これは原点を中心とする半径aの円の内部と円周です．ここで$a \to \infty$の極限をとれば，原点からの距離がどのような値の点でも積分領域内にあることになるので, 座標平面の全域を積分領域とすることになります．このとき，領域内の点のx座標とy座標の大きさに制限がないので

$$R: -\infty \leq x \leq \infty, \quad -\infty \leq \mathrm{y} \leq \infty$$

と書き直せます.

Q. $\mathrm{I} = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(x2+y2)} dxdy = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x2} dx\right\}^2$となる理由がわかりませんでした.

A. 左辺は積分区間に関する広義積分なので，極限操作をあらわに書くと

$$I = \lim_{u\to\infty} \lim_{v\to\infty} \int_{-u}^{u}\int_{-v}^{v} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

極限をとる前の多重積分は，①被積分関数が$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} \times e^{-y^2}$と，$x$の関数と y の関数の積になり，②各変数の積分領域が定数だから，

$$\int_{-u}^{u}\int_{-v}^{v} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{-u}^{u}\int_{-v}^{v} e^{-x^2} \times e^{-y^2} dxdy = \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\, dx \times \int_{-v}^{v} e^{-y^2}\, dy$$

となります．$\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\, dx$と$\int_{-v}^{v} e^{-y^2}\, dy$の極限値存在する（この例題の結論です）とき

$$I = \lim_{u\to\infty} \lim_{v\to\infty} \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\, dx \times \int_{-v}^{v} e^{-y^2}\, dy = \lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\, dx \times \lim_{v\to\infty} \int_{-v}^{v} e^{-y^2}\, dy$$

さらに，定積分の積分変数にどのような記号を使っても積分の値は同じなので,

$$I = \left(\lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x2} dx\right)^2$$

となります.

Q. $I = \iint_{\mathrm{R}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{a} e^{-\rho 2} \rho d\rho$となるところが分かりませんでした.

A. $x = \rho\cos\phi$，$y = \rho\sin\phi$によって変数を(x,y)から(ρ,ϕ)に変えます．微小な面積dSは，(x,y)直交座標系では$dxdy$だったのですが，(ρ,ϕ)極座標系では$\rho d\rho d\phi$となります．したがって

$$I = \iint_{\mathrm{R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \iint_{\mathrm{R}} e^{-\rho^2}\, \rho d\rho d\phi$$

となります．積分領域は，$R: 0 \leq x^2+y^2 \leq a^2$を極座標でいいなおすと（原点を中心とする半径$a$の円の内部と円周ですから）$R: 0 \leq \rho \leq a$，$0 \leq \phi < 2\pi$となります．したがって

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a} e^{-\rho^2}\, \rho d\rho d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\rho=0}^{a} e^{-\rho^2}\, \rho d\rho$$

となります．ここで最後の変形は，①被積分関数が変数ごとに分離され積の形で書かれていること（$e^{-\rho^2}\rho \times 1$)，②各変数の積分領域が定数であることによります.

例題 6.6

Q. θの範囲が0～πの理由は？0～2πでは駄目なのか？

A. この例題の座標は3次元の極座標です．式(6.25)に直交座標との関係および変数の範囲が書かれています．θはz軸から降りてくる角を表します．地図は北緯と南緯で表現し，赤道が0，北極がπ/2，南極が－π/2となりますが，極座標では北極が0，赤道がπ/2，南極がπとなります：θは0～πの間をとります．

問 6.3

Q. (3) 計算が複雑なので説明してください．

A. 3次元極座標による積分では微小な体積が$dV = dr \times rd\theta \times r\sin\theta\, d\phi$となります．教科書の図6-12とその上の解説文を読むとわかることだと思います．$dV = r^2 \sin\theta\ dr\, d\theta\, d\phi$ すなわち，ヤコビアンが

$$J = r^2 \sin\theta$$

となることを変数変換により確認するのが題意です．

講義時間内に2次元の座標系でヤコビアンを求める過程を細かく検討しましたが，3次元でも同じです．座標$x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$は，$u \to u + du$としたときに$\left(\frac{\partial x}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial u}du, \frac{\partial z}{\partial u}du\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)du$という微小な変位を起こします．$v$と$w$についても同様です．$u, v, w$をそれぞれ$du, dv, dw$変化させたときにできる微小な体積は

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)du, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)dv, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right)dw$$

の3個の微小なベクトルがつくる斜方体（マッチ箱を斜めに押しつぶしたような形）の体積であることがわかりました．

3個のベクトルがつくる斜方体の体積は，そのうちの2個がつくる平行四辺形の面積（をあらわすベクトル）と他の一個のベクトルの内積で与えられます．

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)du \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)dv = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) du\, dv$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) du\, dv \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right)dw$$

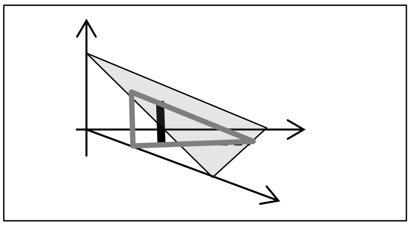
$$= \left\{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial w} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial w} + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial w}\right\} du\, dv\, dw$$

これは，3つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値ということもできます．

演習[4]

Q. (1)累次積分に直したときの積分範囲について説明してください．

A. 「$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ で囲まれる体積」は少しふぞろいな言い方なので，「$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ で囲まれる体積」とするか，「$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1$を満たす部分の体積」とするか・・・いずれにせよ，積分領域はどの座標も負ではなく（2次元座標で言えば第一象限）平面$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$の原点に近い側となります．$a, b, c$はすべて正です．



最初にzについて積分することにしましょう．すなわち，xとyを固定し，z軸と平行な棒（底面積$dxdy$）の体積を求めます．棒の下端は z=0，上端は$z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$までとなります（$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$を解く）．ここま

でを式で書くと

$$\left(\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz\right) dxdy$$

が底面積$dxdy$，高さ$c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$の棒の体積です．

　つぎに，y について積分します．上の棒を x を固定したままで y 方向に動かします(図の点線)．y の範囲は y=0 から$y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)$までとなります（上端は xy 平面 z=0 と平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ の交線まで → $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$を解く）．

ここまでを式で書くと

$$\left\{\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz\right) dy\right\} dx$$

となります．これが厚みdxの薄板の体積です．

　最後に x について積分します．積分範囲は 0 からaまで．したがって

$$\int_0^a\left\{\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz\right) dy\right\} dx$$

$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b dt f(t)$という書き方を用いると

$$\int_0^a dx\left\{\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy\left(\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz\right)\right\}=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} dz$$

最後の等号は，括弧がなくても計算手順は分かるのではずしました．

Q. (2)累次積分に直したときの積分範囲について説明してください．

A.積分領域は$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$の内部です．

まず，x と y を固定し，z について積分します．積分値は z 軸に平行な棒の長さです．これに$dxdy$をかけると，底面積が$dxdy$の棒の体積となります．積分区間は x と y を固定したときに z が変化する範囲ですから，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$を解き

$z=\pm\sqrt{c^2\left(1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)}=\pm c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$となるので，