例題 06

Q. 図をどのように連動させて証明を完成させればよいかわかりません。

A. テキスト p.5 を参照して挑戦してください.

例題 08

Q. $\boldsymbol{\delta_{mn}}$の意味が良くわかりません.

A. テキスト p.7 を参照してください.

例題 09

Q. フーリエ級数を計算しようとしたら、

$$\boldsymbol{b_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \sin nt dt}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin^3 t}{n}\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt}{n}\left(3\sin^2 t \cos t\right) dt}$$

となり、第２項の積分がわかりませんでした。式変形を知りたいです.

A.　周期２πの関数$f(t)$をフーリエ級数に展開するとは，その関数を

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \cdots + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \cdots$$

の形に表すことです．右辺の各係数を求める方法は（確かに，ふつうは，質問でやっているようにサイン・コサインの直交性を用いるのですが）どんなものでもかまいません.

そこで，サインの３倍角の式

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$$

より

$$\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$$

これで展開が完了しました.

さて，質問は積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \,(\sin^2 t \cos t) dt$$

の計算方法．倍角の式と $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$を使います：

$$\cos nt \sin^2 t \cos t = \cos nt\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right)\cos t = \frac{1}{4}\{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t\} - \frac{1}{4}\{\cos(n+2)t + \cos(n-2)t\}\cos t$$

$$= \frac{1}{4}\{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t\} - \frac{1}{8}\{\cos(n+3)t + \cos(n+1)t + \cos(n-1)t + \cos(n-3)t\}$$

$$= \frac{1}{8}\{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t\} - \frac{1}{8}\{\cos(n+3)t + \cos(n-3)t\}$$

ここから先の説明はいりませんね．でも，部分積分にもちこまず，はじめから３倍角の式を用いて

$$\int \sin^3 t \sin nt \, dt = \int \left(\frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t\right)\sin nt \, dt$$

としたほうが少し楽かもしれないですね.

ちなみに「複素指数関数」を用いると, 3倍角の式は簡単に求まります：

$$e^{i\times 3\theta} = (e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

$$= \{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\} + i\{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\}$$

$$\therefore \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$$

例題 11

Q. “混同を避けるため”という表現がありましたが、何との混同を避けるためなのかが分かりません。また、$\cos$ "m"ωt を掛けた意味が分かりません。$\cos$ "n"ωt ではどうなのでしょう？

A. 総和記号がnを変数として走らせているため，$\cos n\omega t$ を掛けたときに，総和記号の中のnと混同するといけないと思いました. 総和記号の変数はなんでもよいので，むしろ

$$\int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t\}\right)\cos n\omega t\, dt$$

と書いた方がよかったかもしれません.

例題 14

Q. フーリエ展開をしても$(-1)^n$ とならずに $\cos 2n\pi$ となってしまったのですが、何処で間違えたのかが良くわかりません。

A. 偶関数なので$b_n = 0$，定数部分は

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{3}\pi^3 = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2}{3}\pi^2 \ \rightarrow\ \frac{a_0}{2} = \frac{1}{3}\pi^2$$

コサインの係数は

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos mt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos mt\, dt = \frac{2}{\pi m^3}\int_0^{m\pi}(mt)^2\cos mt\, d(mt) = \frac{2}{\pi m^3}\int_0^{m\pi} u^2\cos u\, du$$

$$\int u^2\cos u\, du = \int u^2\left(\frac{d}{du}\sin u\right)du = u^2\sin u - \int(2u)\sin u\, du = u^2\sin u - 2\left\{-u\cos u - \int(-\cos u)\ du\right\}$$

$$= u^2\sin u + 2u\cos u - 2\sin u = (u^2-2)\sin u + 2u\cos u$$

$\sin(m\pi) = 0$，$\sin 0 = 0$などを考慮すると

$$a_m = \frac{2}{\pi m^3}[(u^2-2)\sin u + 2u\cos u]_0^{m\pi} = \frac{2}{\pi m^3}[(2(m\pi)\cos m\pi)] = \frac{4}{m^2}\cos m\pi = \frac{4}{m^2}(-1)^m$$

したがって

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos t - \frac{1}{2^2}\cos 2t + \frac{1}{3^2}\cos 3t - \cdots\right) = \ t = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\cos mt$$

となります.

問題 06

Q. $\cos(4n-3)\frac{\pi}{2} = 0$を数学的帰納法を用いて示そうとすると等式が成り立たなくなってしまい，何処が間違えているのかがわからない。

A. 題意の式は

$$\cos\left[(4n-3)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[\left(2\pi n - \frac{3}{2}\pi\right)\right] = \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

とすれば確かめることができます（第2と第3の等号は周期が2πだから）.

質問者は，数学的帰納法を使いたいから

まず$n=1$とおいて，$\cos\left[(4\times 1-3)\frac{\pi}{2}\right]=\cos\frac{\pi}{2}=0$

つぎに$n=k$とおいた式，$\cos\left[(4k-3)\frac{\pi}{2}\right]=0$が成り立つとし，この式を用いて$\cos\left[(4(k+1)-3)\frac{\pi}{2}\right]=0$であることを証明する

という手続きを踏みます．

$$\cos\left[(4(k+1)-3)\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[(4k-3)\frac{\pi}{2}+4\times\frac{\pi}{2}\right]=\cos[(4k-3)\frac{\pi}{2}+2\pi]=\cos\left[(4k-3)\frac{\pi}{2}\right]=0$$

最後から２番目の等号は，コサインの周期が２πであることによります．最後の等号が数学的帰納法の前提となる式です．

これで$n=1,2,3,\cdots$について証明が終わり，残りは$n=0,-1,-2,\cdots$についての証明ですが，ここでは省略．

数学的帰納法という着想はおもしろいですが，この式の証明法としては勧めません．

問題 10

Q.　グラフを描いて理解しましたが，数式では証明できませんでした．

A.　テキストに収録してある解答をそのまま写します．

$f(t)$が周期Ｔの周期関数なので$f(t)=f(t+T)$が成り立つ．そこで被積分関数を置き換えると

$$\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(t+T)dt$$

となります．この式の右辺で積分変数を$\tau=t+T$に置き換えると，$d\tau=dt,\ \tau{:}T\to a+T$：

$$\int_0^a f(t+T)dt=\int_T^{a+T} f(\tau)d\tau=\int_T^{a+T} f(t)dt$$

最後の等号はτをtと書き直しました．つぎに

$$\int_0^T f(t)dt=\int_0^a f(t)dt+\int_a^T f(t)dt$$

のように積分区間を分解し右辺第１項を書き換えると

$$\int_0^T f(t)dt=\int_T^{a+T} f(t)dt+\int_a^T f(t)dt=\int_a^{a+T} f(t)dt$$

となり，題意を示すことができます．

問題 13

Q.　テキストの解答に「$f(t+2\pi)\cos m(t+2\pi)=f(t)\cos(mt+2m\pi)=f(t)\cos mt$　が成り立つので」とありましたが，この式を理解できませんでした．

A. $f(t)$は周期２πの周期関数なので

$$f(t+2\pi)=\ f(t)$$

です．最左辺の$\cos m(t+2\pi)$の引数部分を展開すると

$$m(t+2\pi)=mt+2m\pi$$

となるので，第１の等号が成り立ちます：

$$f(t+2\pi)\cos m(t+2\pi)=f(t)\cos(mt+2m\pi)$$

つぎに，コサインの周期が２πなので，mを整数とすると$2m\pi$も周期となります．したがって

$$\cos(mt+2m\pi)=\cos mt$$

したがって

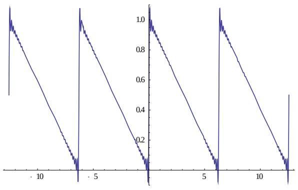
$$f(t)\cos(mt+2m\pi)=f(t)\cos mt$$

となります．

問題 15

Q. (iii)のグラフが変だと思います.

A. 変でした．ごめんなさい．こういう形です：



Q. 描いたグラフが偶関数か奇関数かを判定できません.

A. グラフを透明な紙にコピーして，

1）もとの紙とコピーの原点を重ねてピンでとめ，180 度回転すると，x 軸と y 軸が（反対向きになって）重なります．このときもとのグラフとコピーのグラフが重なる場合，奇関数です．

2）コピーを裏返しにして，両方の x 軸の向きをそろえて重ねます．原点は一致し，y 軸だけ逆向きになります．このときグラフが重なるなら，偶関数です．