Q. 色々調べてみたのですが、負の振動数という概念がイマイチイメージできません。

A. 実数の時間波形に対するサインとコサインを用いたフーリエ三角係数やフーリエ変換では「負の振動数」は現れない．
複素フーリエ係数やフーリエ変換で現れる負の振動数は複素平面上の時計回りの回転を表し，同じ大きさの正の振動数は反時計回りの回転を表す．両者をペアとして和をとるとコサインの実数の振動が生じ，差をとるとサインの純虚数の振動が生じる．
実数の時間波形に対するフーリエ変換のスペクトルは，正の振動数と負の振動数をペアとして考えるものである．
説明をしている本やサイトがあまりないから，ほとんど毎回のように授業で解説しているのだが！

例題 02　幅$\boldsymbol{d}$,高さ 1 の単一パルス $\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{1} \cdots -\frac{d}{2} < t < \frac{d}{2} \\ \mathbf{0} \cdots \text{その他} \end{cases}$ のフーリエ変換を求めよ．

Q. 2 つ目の等号で何故「$\boldsymbol{f = 0}$の領域を積分区間から除外する」必要があったのかがわかりません。

A. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\mathrm{d}/2}^{\mathrm{d}/2} 1\, e^{-i\omega t} dt$という式変形をした根拠は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{-\frac{d}{2}} f(t)\, e^{-i\omega t} dt + \int_{-\mathrm{d}/2}^{\mathrm{d}/2} f(t)\, e^{-i\omega t} dt + \int_{\frac{\mathrm{d}}{2}}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{-\frac{d}{2}} 0 \times e^{-i\omega t} dt + \int_{-\mathrm{d}/2}^{\mathrm{d}/2} 1 \times e^{-i\omega t} dt + \int_{\frac{\mathrm{d}}{2}}^{\infty} 0 \times e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\mathrm{d}/2}^{\mathrm{d}/2} 1\, e^{-i\omega t} dt$$

である．被積分関数が連続的に 0 となる範囲で定積分すると値が 0 となるのだから，はじめから積分区間に含める必要がない．

例題 03　$\boldsymbol{t = 0}$から始まる指数関数的減衰$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{e^{-at}} \cdots \mathbf{0} < \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0} \cdots \text{その他} \end{cases}$　$(\boldsymbol{a > 0})$ のフーリエ変換を求めよ．

Q. $\frac{1}{-(a+i\omega)}\left[e^{(a+i\omega)t}\right]_0^{\infty}$から$\mathbf{Re}[F(\omega)], \mathbf{Im}[F(\omega)]$への変形が良くわかりません。

A. 定積分は，区間の上端について極限をとる広義積分である：
まず,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} = \frac{1}{-(a+i\omega)} \lim_{t\to\infty} e^{-(a+i\omega)t}$$

であるから，$\lim_{t\to\infty} e^{-(a+i\omega)t}$の値を求めればよい．$e^{-(a+i\omega)t} = e^{-at} \times e^{-i\omega t}$　は右辺の第一因子が（$a > 0$なので）時間とともに指数関数的に減衰する実数，第二因子が時間とともに単位円周上を回転する．したがって，半径が指数関数的に減衰する螺旋運動を表し，0 に収束することが予測できる．この極限値を数学的に提示するには,

$$\left|e^{-(a+i\omega)t}\right| = |e^{-at}| \times \left|e^{-i\omega t}\right| = |e^{-at}| \times 1 \to 0$$

とすればよい．複素数 z の絶対値 |z|が 0 に収束するならば z が 0 に収束する（対偶をとれば明らか）．よって

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} = 0$$

一方，$\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}$に t=0 を代入すると

$$\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\Big|_{t=0} = \frac{e^0}{-(a+i\omega)} = \frac{1}{-(a+i\omega)}$$

以上をまとめると

$$F(\omega) = \frac{1}{-(a+i\omega)}\left[e^{(a+i\omega)t}\right]_0^{\infty} = 0 - \left\{\frac{1}{-(a+i\omega)}\right\} = \frac{1}{(a+i\omega)}$$

つぎに，得られたフーリエ変換の実部と虚部を求める：

$$F(\omega)=\frac{1}{(a+i\omega)}=\frac{1}{(a+i\omega)}\times\frac{(a-i\omega)}{(a-i\omega)}=\frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}=\left(\frac{a}{a^2+\omega^2}\right)+i\left(\frac{-\omega}{a^2+\omega^2}\right)$$

よって

$$\mathrm{Re}[F(\omega)]=\frac{a}{a^2+\omega^2},\quad \mathrm{Im}[\,F(\omega)]=\frac{-\omega}{a^2+\omega^2}$$

となる．

例題 04　ガウス関数（正規分布）$f(t)=e^{-a^2t^2}$ のフーリエ変換を計算せよ．

Q. 最後から 2 つ目の等号で、何故区間が$e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}\int_{-\infty+\frac{i\omega}{2a^2}}^{\infty+\frac{i\omega}{2a^2}}e^{-a^2}\,dz$となるのかがわかりません。

A.　実数の変数　t がー∞から∞まで動く積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\left(t+\frac{i\omega}{2a^2}\right)^2}dt$$

において，変数を置換して

$$z=\ t+\frac{i\omega}{2a^2}$$

とおくと，z は複素平面上の直線（虚軸上の点$\frac{i\omega}{2a^2}$を通過し，実軸と平行で，無限に長い）を無限の彼方$\left(-\infty+\frac{i\omega}{2a^2}\right)$から反対側の無限の彼方$\left(\infty+\frac{i\omega}{2a^2}\right)$まで動く．このことを z についての積分で表すと

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\left(t+\frac{i\omega}{2a^2}\right)^2}dt=\int_{-\infty+\frac{i\omega}{2a^2}}^{\infty+\frac{i\omega}{2a^2}}e^{-a^2z^2}dz$$

となる．

問題 01 例題 01 では，虚部のスペクトルに負の振動数が現れる．負の振動数は何を意味するか．
また，このスペクトルが原点について対称となるのはどのような状況を反映しているか．

Q.　「スペクトルが原点について対称」とはどのような状態であるのかがわかりません。

A. 用語の確認をしよう．

スペクトルとは「フーリエ変換やフーリエ係数の実部および虚部を振動数の関数として表したグラフ，あるいはフーリエ変換やフーリエ係数の絶対値および位相を振動数の関数として表したグラフ」である．この問を読むと例題 01 のフーリエ係数の虚部を振動数の関数として表したものを指していることが分かるだろう．

$y=f(x)$の場合，グラフが原点について対称とは，$f(-x)=-f(x)$すなわち関数が奇関数となることと同値である．この問では振動数は離散的に変化し，$n\Delta\omega$においてnを$0,\pm1,\pm2,\cdots$と変える．したがって振動数軸で原点について反対側はn に対する $-$ nの位置となる．原点について反対側を見たとき関数値（$\mathrm{Im}[c_n]$）の符号が反転すれば，グラフは原点について対称となる．すなわち

$$\mathrm{Im}[c_n]=-\mathrm{Im}[c_{-n}]$$

となることが本問の状況である．

問題 03

Q. 解答の(ⅱ)で、サイン変換の答えが『$=-F_c(\omega)$』となっていますが、『$=-F_s(\omega)$』ではないでしょうか？

A.　そのとおりです．ミスプリでした．教えてくれてありがとう！

Q. この問で聞かれている内容は，試験などでは自明のこととして使ってよいですか？

A. 試験問題が，この問のように，それを聞いていないかぎり，常識として利用してかまわない．

問題 05

Q. 解答の最後のほうに「$f(t)=\frac{1}{2}\left(g(t)+h(t)\right)$すなわち$f(t)$を偶関数と奇関数から構成したとき」とありますが，ここが分かりませんでした．

A. まず，どんな関数も偶関数と奇関数の和として表せることを理解しよう．関数$u(t)$が与えられたとき

$$v(t)=\frac{1}{2}\{u(t)+u(-t)\},\quad w(t)=\frac{1}{2}\{u(t)-u(-t)\}$$

という 2 つの関数$v(t)$と$w(t)$をつくる（これは必ずできる）．このとき$v(-t)=v(t)$，$w(-t)=-w(t)$となるので，それぞれ偶関数と奇関数である．また，$u(t)=v(t)+w(t)$となる．こうして，与えられた関数$u(t)$は偶関数と奇関数の和として表される（解答では「偶関数と奇関数から構成される」と言ったが，$f(t)=\frac{1}{2}\left(g(t)+h(t)\right)$の内容を言っていることは自明だろう）ことがわかる．もちろん，$u(t)$の定義域が原点について対称な区間であることは必要.

つぎに，解答の趣旨は以下のとおり：関数$f(t)$が与えられると

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(g(t)+h(t)\right)$$

となるような偶関数gと奇関数hが必ず存在する．すなわち，$f(t)$を偶関数と奇関数から構成することができる．このとき$f(t)$のフーリエ変換は（フーリエ変換の積分が線形だから）

$$F=\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(g+h)\right]=\frac{1}{2}\mathcal{F}[g]+\frac{1}{2}\mathcal{F}[h]$$

となる.$\mathcal{F}[g]$は偶関数のフーリエ変換だから実数,$\mathcal{F}[h]$は奇関数のフーリエ変換だから純虚数となる.こうして最右辺の第 1 項がFの実部，第 2 項が虚部となる.

Q. $F[h]=-\int_{-\infty}^{0}e^{+at}e^{-iwt}dt+\cdots$　の先頭のマイナス符号がわかりません.

A. $h(\mathrm{t})$は，$t>0$において$h(t)=e^{-at}$となる奇関数なので，負の領域$-|t|$における関数値は

$$f(-|t|)=-f(|t|)=-e^{-a|t|}$$

である．普通の書き方になおして，$t<0$では（$t=-|t|$だから）

$$f(t)=-e^{at}$$

これより，積分を t の正の部分と負の部分に分割して,

$$\mathcal{F}[h]=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\,e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}(-e^{+at})\,e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}\,e^{-i\omega t}dt$$

となる.

問 06　**ガウス関数のフーリエ変換$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2t^2}e^{-i\omega t}dt$を$\omega$で微分し（微分してから積分してよい），部分積分法を適用できるように変形することで，$\frac{d}{d\omega}F(\omega)+\frac{\omega}{2a^2}F(\omega)=0$を導け．$F(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{a}$を用いてこの微分方程式の特解を求めよ.**

Q. 途中の式変形を詳しく説明してください．特解の求め方を詳しく説明してください。

A. この問の出題の趣旨は次のとおりである.

ガウス関数のフーリエ変換を定義式によって直接に求めようとすると複素積分が必要となり難しいかもしれない．そこで，ガウス関数のフーリエ変換の定義式が，ある微分方程式の解であることを知ったうえで，微分方程式を解き，フーリエ変換を間接的に実行しようというものである.

まず，ガウス関数のフーリエ変換の定義式が$\frac{d}{d\omega}F(\omega)+\frac{\omega}{2a^2}F(\omega)=0$の解となることを調べる．そのために，与えられた$F(\omega)$を積分による定義式のまま ω で微分し，与えられた微分方程式の左辺に代入し，微分方程式が成立することを確認する.

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2t^2}e^{-i\omega t}dt$$

微分と積分の順序を交換する（どんなときにも交換できるわけではないが，今回はできることを既知とする）

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}(e^{-a^2t^2}e^{-i\omega t})dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2t^2}\frac{\partial}{\partial\omega}(e^{-i\omega t})dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2t^2}(-it)e^{-i\omega t}dt=(-i)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2t^2}te^{-i\omega t}dt$$

最右辺の被積分関数の第一因子　$e^{-a^2t^2}$　を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}e^{-a^2t^2}=\frac{d}{d(-a^2t^2)}e^{-a^2t^2}\times\frac{d(-a^2t^2)}{dt}=e^{-a^2t^2}\times(-a^2 2t)=-2a^2e^{-a^2t^2}t$$

となり，被積分関数の第二因子 t と第一因子の積が現れる（ときおり見かける不定積分のトリックで，1 年の積分の授業でも勉強した）．これを使うと

$$\mathrm{e}^{-a^2t^2}\times t=\left(\frac{1}{-2a^2}\right)\frac{d}{dt}e^{-a^2t^2}$$

すなわち

$$(-i)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2t^2}te^{-i\omega t}dt=-i\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{-2a^2}\times\frac{d}{dt}e^{-a^2t^2}\right)}_{te^{-a^2t^2}}e^{-i\omega t}dt=\frac{i}{2a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}e^{-a^2t^2}\right)e^{-i\omega t}dt$$

となって，部分積分により積分計算を先に進めることができることがわかる（この広義積分の極限の求め方は例題 3，問 5 に現れるものと同じ）：

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{i}{2a^2}\left\{\left[e^{-a^2t^2}e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}-(-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2t^2}e^{-i\omega t}dt\right\}=\frac{-\omega}{2a^2}F(\omega)$$

以上により

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2t^2}e^{-i\omega t}dt$$

が微分方程式

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)+\frac{\omega}{2a^2}F(\omega)=0$$

の解となることが，代入によって示された．

つぎに，上の作業とはまったく独立に，この微分方程式の解を求める．ここでは変数分離法と呼ばれる方法で解く．変数分離法では，独立変数 ω と従属変数 F を等号の異なる側に分離する．

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)+\frac{\omega}{2a^2}F(\omega)=0\qquad\rightarrow\qquad\frac{dF(\omega)}{d\omega}=-\frac{\omega}{2a^2}F(\omega)$$

$$\rightarrow\qquad\frac{dF}{F}=-\frac{\omega d\omega}{2a^2}$$

最後の式の左辺　$\frac{dF}{F}$　が「F を変数とする関数 $G(F)$」の微(小増)分 dG であるとしよう．また右辺を ω を変数とする関数 $g(\omega)$ の微分 dg であるとしよう．そうすると，微分方程式は　$dG=dg$ となり，　$G(F)=g(\omega)+\mathrm{C}$. これを $F=$・・・の形に直せば，微分方程式が解けたことになる．実際，

$$\frac{dF}{F}=d\log F$$

(*これは，* $\log F$ の F による微分係数が $\frac{\mathrm{d}\log F}{dF}=\frac{1}{F}$ であること，言い直すと $G(F)=\int\frac{dF}{F}=\log F$　であることに他ならない)

$$\mathrm{g}(\omega)=\int-\frac{\omega d\omega}{2a^2}=-\frac{1}{2a^2}\int\omega d\omega=-\frac{1}{2a^2}\frac{1}{2}\omega^2=-\frac{1}{4a^2}\omega^2$$

よって，微分方程式の一般解は

$$\log F = -\frac{1}{4a^2}\omega^2 + \mathrm{C}$$

を解いて

$$F(\omega) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4a^2}\omega^2}, A = e^C \text{とした}$$

未定の係数 A を決めることが，微分方程式の 1 つの特解を得る作業となる．そのためには，ある ω の値の関数値 F が与えられねばならない．ここで，ガウス関数のフーリエ変換の定義式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2} e^{-i\omega t} dt$$

が ω=0 のときにどのような値になるかを調べる：

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2} e^{-i\times 0\times t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2} dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2} d(at) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{a}\sqrt{\pi}$$

最後の積分は「積分法の基礎と応用」で学んだので，必要なら教科書を参照．

以上により，微分方程式の一般解のうちで$F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$を満たす特解を求めれば，それがガウス関数をフーリエ変換した結果として得られる関数の具体的な関数形となる．

ω＝0 を代入すると

$$F(0) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4a^2}\times 0^2} = A\,e^0 = A = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

こうして，求める特解が決まった：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4a^2}\omega^2}$$