問 12

Q. 「フーリエ変換の線形性を用いて計算する」という意味が分かりませんでした。

A. $f(t)$のフーリエ変換を$\mathcal{F}[f(t)]$と表す：

$$\mathcal{F}[f(t)] \equiv F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

まず，フーリエ変換の線形性とは，aとbを任意の定数として

$$\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = a\,\mathcal{F}[f(t)] + b\mathcal{F}[g(t)]$$

が成り立つことをいう．

その例は，たとえば[例題 05]で出てくる

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} e^{-i\omega t} dt = \frac{\pi}{i}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\Omega)t} dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\Omega)t} dt\right)$$

のような計算である．

問 14

Q. $\boldsymbol{g\cos\omega_0 t}$ **が偶関数であるとき答えが実数と言える理由が分かりません。**

$$\mathcal{F}[g(t)\cos\omega_0 t] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos\omega_0 t\, e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos\omega_0 t\,\{\cos\omega t - i\sin\omega t\} dt$$

である．右辺の被積分関数について，$g(t)\cos\omega_0 t \times \cos\omega t$は($\cos\omega t$が偶関数なので)偶関数どうしの積となり偶関数．また$g(t)\cos\omega_0 t \times \sin\omega t$は偶関数と奇関数の積なので奇関数．この積分は，区間が$(-\infty,\infty)$の広義積分であり，原点について対称な区間$[-c,c]$で積分し$c\to\infty$の極限を求める：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \quad = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}$$

区間$[-c,c]$における奇関数の積分は 0 となるので，虚数部分が消えて実数となる．

問 15

Q. 突然にΩが出てきた理由がわかりませんでした.

A. ミスプリ．$\Omega \to \omega_0$と読み替え．ごめん．

Q.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-\omega_0)\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-\omega_0)\, e^{i(\omega-\omega_0)t} e^{i\Omega t} d(\omega-\omega_0) = e^{i\omega_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\acute{\omega})\, e^{i\acute{\omega} t} d\acute{\omega}$$

$\boldsymbol{F(\omega-\omega_0)}$ **は変わっていないのに** $\boldsymbol{d(\omega-\omega_0)}$ **に変えてしまっても良いのですか？**

A. dfは「fの微(小な増)分」である．$f = \omega - \omega_0$のとき，変数として変化するのはωだけ（ω_0は定数だから変化しないので$d\omega_0 = 0$）．こうして

$$d(\omega-\omega_0) = d\omega - d\omega_0 = d\omega - 0 = d\omega$$

問 16

Q. スペクトルの関係についての説明が良くわからなかったので、言葉による詳細な説明が欲しいです。

A.

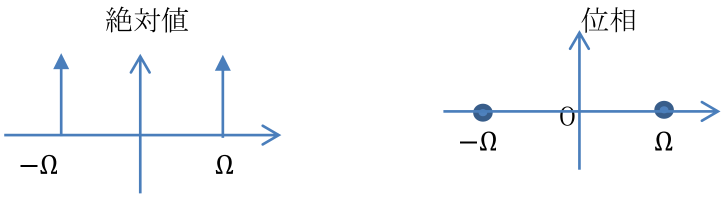
$$\cos\Omega t = \frac{1}{2}e^{i\Omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\Omega t} = \frac{1}{2}e^{0}e^{i\Omega t} + \frac{1}{2}e^{0}e^{-i\Omega t}$$

$$\sin\Omega t = \frac{1}{2i}e^{i\Omega t} + \frac{-1}{2i}e^{-i\Omega t} = \frac{-i}{2}e^{i\Omega t} + \frac{i}{2}e^{-i\Omega t} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{i\Omega t} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}e^{-i\Omega t}$$

上式は，単にオイラーの公式により，サイン・コサインを複素指数関数で書き換えただけだが，右辺は「どんな振動数のところに，どんな振幅の，どんな位相の，複素平面上の“回転”があるか」すなわちフーリエ変換の内容を表す式となっている．もちろん，フーリエ変換は，ωの関数として記すから，たとえば$\frac{1}{2}e^{i\Omega t}$という項はδ関

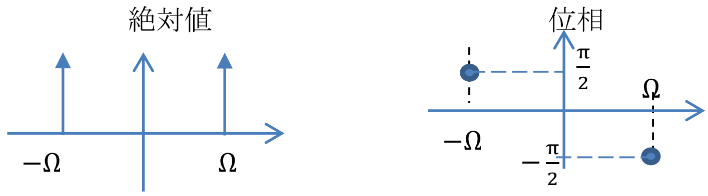
数を用いて$\frac{1}{2}\delta(\omega-\Omega)\times 2\pi=\pi\,\delta(\omega-\Omega)$となる（$\times 2\pi$はフーリエ変換の定義が変わると変化する．）その位相は 0 である（複素平面の正の実数）．

$\cos\Omega t$のフーリエ変換のスペクトルを，絶対値と位相で描くと



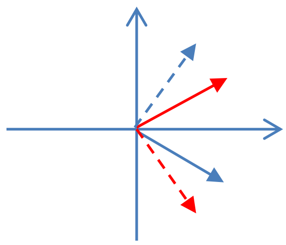
コサインのスペクトルはΩと－Ωの成分の間で位相差が０.

$\sin\Omega t$のフーリエ変換のスペクトルを，絶対値と位相で描くと



サインのスペクトルはΩと－Ωの成分の間で位相差がπ.

コサインとサインを比較すると，Ωの成分でも－Ωの成分でも位相差がπ/2．ただし位相差の符号が反転する．



$\cos\Omega t$と$\sin\Omega t$を，複素平面上の複素指数関数が表すベクトルの和で描く．青の実線が$\frac{1}{2}e^{-i\Omega t}$，これを 90 度だけ反時計回りに回転したのが青の点線が$\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}\times e^{-i\Omega t}$．赤の実線が$\frac{1}{2}e^{i\Omega t}$，これを 90 度だけ時計回りに回転したのが青の点線が$\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}\times e^{i\Omega t}$．実線のベクトルどうしの和が$\sin\Omega t$，　点線のベクトルどうしの和が $\cos\Omega t$.

問 17

Q. まったく分かりませんでした.

A. $\cos\Omega t=\sin\left(\Omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\Omega\left(t+\frac{\pi}{2\Omega}\right)\right)$が成り立つ.

問 16 と同様に，シフトは時間軸を左向きに$\frac{\pi}{2\Omega}$.　ここで

$$\mathcal{F}[\sin\Omega t]=i\pi\delta(\omega+\Omega)-i\pi\delta(\omega-\Omega)$$

であり，説明すべきことは　$e^{+i\omega\frac{\pi}{2\Omega}}\times\mathcal{F}[\sin\Omega t]=\mathcal{F}[\cos\Omega t]$である.

　$\delta(\omega-\Omega)\times e^{i\omega\frac{\pi}{2\Omega}}$　では，$\omega=\Omega$のときだけ$\delta(\omega-\Omega)\neq 0$だから，第 2 因子の$e^{i\omega\frac{\pi}{2\Omega}}$で$\omega=\Omega$を代入しても同じ式となる：

$$\delta(\omega-\Omega)e^{i\omega\frac{\pi}{2\Omega}}=\delta(\omega-\Omega)e^{i\Omega\frac{\pi}{2\Omega}}=\delta(\omega-\Omega)e^{\frac{i\pi}{2}}=\delta(\omega-\Omega)\times i=i\,\delta(\omega-\Omega)$$

同様に

$$\delta(\omega+\Omega)e^{i\omega\frac{\pi}{2\Omega}}=-i\,\delta(\omega+\Omega)$$

となり

$$\mathcal{F}\left[\sin\Omega\left(t+\frac{\pi}{2\Omega}\right)\right]=e^{i\omega\frac{\pi}{2\Omega}}\times\mathcal{F}[\sin\Omega t]=e^{i\omega\frac{\pi}{2\Omega}}\times\left(i\pi\delta(\omega+\Omega)-i\pi\delta(\omega-\Omega)\right)$$

$$=(-i)\times i\,\pi\delta(\omega+\Omega)-i\times i\pi\,\delta(\omega-\Omega)=\pi\delta(\omega+\Omega)+\pi\,\delta(\omega-\Omega)=\mathcal{F}[\cos\Omega t]$$

を得る．

サインとコサインのスペクトルは前問となんらかわらないので，位相についても特に加えることがない．

問 19

Q. t > 0 の部分の書き方がわかりません。

別解の広義積分の計算がわからなかったのだろうか．

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\times e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{i\Omega t}\,e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{i(\Omega-\omega)t}\,dt=\frac{-1}{a+i(\omega-\Omega)}\left[e^{-at}e^{i(\Omega-\omega)t}\right]_0^\infty$$

ここまでは形式的な定積分であるから疑問の余地はないだろう．次の計算は，複素指数関数$e^{i\theta}$の絶対値が 1 となることを用いた頻出のパターンである：

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-at}e^{i(\Omega-\omega)t}\right|=\lim_{t\to\infty}\left|e^{-at}\right|\left|e^{i(\Omega-\omega)t}\right|=\lim_{t\to\infty}\left|e^{-at}\right|=0$$

複素関数の絶対値が 0 になるとき，もとの複素数も 0 となるので

$$\lim_{t\to\infty}e^{-at}e^{i(\Omega-\omega)t}=0$$

よって，定積分の上端では値が 0 である．下端ではe^0=1 をもちいて：

$$F(\omega)=0-\frac{-1}{a+i(\omega-\Omega)}e^{-a\times 0}e^{i(\Omega-\omega)\times 0}=0-\frac{-1}{a+i(\omega-\Omega)}=\frac{1}{a+i(\omega-\Omega)}$$

となる．

問 20

Q. 何を求めている計算かわかりません。

A. 本問は「$f(t)$のフーリエ変換が$\mathcal{F}[f]=F(\omega)$のとき，$\frac{df(t)}{dt}$のフーリエ変換が$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dt}\right]=i\omega F(\omega)$」という定理の証明である．その方針は

１．微分係数の定義が $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}f(t+\Delta t)-\frac{1}{\Delta t}f(t)$　すなわち２つの関数の線形和の形をもとにしていること

２．フーリエ変換が線形であること

３．$f(t+\Delta t)$は$f(t)$の時間をシフトしたものなので，それぞれのフーリエ変換は位相差の分だけことなること

を用いる．ただし，微分演算の極限をとる操作とフーリエ変換の積分をする操作の順番を変えたが，ここではその正当性を数学的に保証していない．

後半では，同じ定理をフーリエ変換の積分を部分積分によって証明している．こちらでは$f(t)\xrightarrow[t\to\pm\infty]{}0$を仮定するが，同じ仮定がフーリエ変換が存在するための条件となるので，受けいれることに困難はないだろう．

問 21

Q. $\cos(\Omega t)=\frac{1}{\Omega}\frac{d}{dt}\sin\Omega t$　がわかりません．

A. $\frac{d}{dt}\sin\Omega t=\Omega\cos\Omega t$ ならわかる？

問 23

Q. 『応答』とはどういう意味かがわかりませんでした．

A. http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%BF%9C%E7%AD%94

例題 10

Q. 解答の手順が知りたいです。（説明つきの解説）実際、何の計算をしているのかがわからない状態です。

A. $\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{df}{dt}-6f=\sin t$ の解のフーリエ変換$F(\omega)$を求めよ

解

$\mathcal{F}[f]=F(\omega)$のとき，$\frac{df(t)}{dt}$のフーリエ変換が

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dt}\right]=i\omega F(\omega)$$

$\frac{d^2f}{dt^2}$のフーリエ変換は，上式でfのかわりに$f'=\frac{df}{dt}$とすればよい：

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right]=\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\frac{df}{dt}\right]=i\omega\,\mathcal{F}\left[\frac{df}{dt}\right]=i\omega\times i\omega F(\omega)=-\omega^2F(\omega)$$

以上の結果とフーリエ変換の線形性を用いると，問題で与えられた式の左辺のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{df}{dt}-6f\right]=-\omega^2F(\omega)+i\omega F(\omega)-6F(\omega)=(-\omega^2+i\omega-6)F(\omega)$$

となる．

問題で与えられた式の右辺$\sin t$のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[\sin\omega t]=i\pi\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big)$$

となることは他の例題や問題で学習済である．以上をまとめると

$$\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{df}{dt}-6f=\sin t$$

の両辺をフーリエ変換して得た等式が

$$(-\omega^2+i\omega-6)F(\omega)=i\pi\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big)$$

である．この式を整理して$F(\omega)$を求めると（これこそが，やりたかったことである．微分演算は，フーリエ変換すると定数倍$\times\, i\omega$）になるのでできること）

$$F(\omega)=\frac{i\pi\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big)}{(-\omega^2+i\omega-6)}$$

である．このまま両辺を逆フーリエ変換すれば$f(t)=\cdots$という式を得る．それが微分方程式の解となる．

そこで，右辺の逆フーリエ変換をやりやすいように，式を整える．具体的には，右辺を部分分数に分解する：

$$(-\omega^2+i\omega-6)=-(\omega+2i)(\omega-3i)$$

よって

$$\frac{1}{(-\omega^2+i\omega-6)}=\frac{-1}{(\omega+2i)(\omega-3i)}=\frac{A}{\omega+2i}+\frac{B}{\omega-3i}\rightarrow\quad A=-\frac{i}{5},\qquad B=\frac{i}{5}$$

$$\frac{i\pi\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big)}{(-\omega^2+i\omega-6)}=\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big)\times i\pi\left\{\frac{-\frac{i}{5}}{\omega+2i}+\frac{\frac{i}{5}}{\omega-3i}\right\}$$

$$=\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big)\left\{\frac{\frac{\pi}{5}}{\omega+2i}+\frac{-\frac{\pi}{5}}{\omega-3i}\right\}$$

さて，δ関数の定義

$$\delta(\omega+1)=0\cdots\omega\neq-1,\qquad \text{かつ}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\delta(\omega+1)dt=f(-1)$$

を考慮すると

$$f(\omega)\delta(\omega+1)\to f(-1)\delta(\omega+1)$$

という置き換えをしても積分したあとの結果は同じである：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\delta(\omega+1)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(-1)\delta(\omega+1)dt=f(-1)\times\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+1)dt=f(-1)\times 1=f(-1)$$

こうして

$$\delta(\omega+1)\left(\frac{\frac{\pi}{5}}{\omega+2i}\right)\to\delta(\omega+1)\left(\frac{\frac{\pi}{5}}{-1+2i}\right),\quad \delta(\omega-1)\left(\frac{\frac{\pi}{5}}{\omega+2i}\right)\to\delta(\omega-1)\left(\frac{\frac{\pi}{5}}{1+2i}\right)$$

など．よって

$$\big(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\big)\left\{\frac{\frac{\pi}{5}}{\omega+2i}+\frac{-\frac{\pi}{5}}{\omega-3i}\right\}=\frac{\pi}{5}\left(\delta(\omega+1)\left\{\frac{1}{-1+2i}-\frac{1}{-1-3i}\right\}-\delta(\omega-1)\left\{\frac{1}{1+2i}-\frac{1}{1-3i}\right\}\right)$$

$$=\frac{\pi}{5}\left(\delta(\omega+1)\left(-\frac{1}{10}-7\frac{i}{10}\right)-\delta(\omega-1)\left(\frac{1}{10}-7\frac{i}{10}\right)\right)$$

$$=-\frac{\pi}{50}\big(\delta(\omega+1)(1+7i)+\delta(\omega-1)(1-7i)\big)$$

ここから先は例題 11 に引き継ぐ.

例 16

Q. スペクトルの書き方の方法が知りたいです。（グラフによる表現がわかりません。）

A. $f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$のスペクトルとは，ωを横軸にし$F(\omega)$の値を縦軸にとったグラフのことである．「$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$のスペクトル」を「$f(t)$のスペクトル」と簡略化していうときもある．

$F(\omega)$は，一般的には複素数の値をとる関数である（$f(t)$が奇関数なら$F(\omega)$は純虚数，偶関数なら実数，いずれでもなければ複素数）．そこで

【ケース１】$F(\omega)$の実数部を$\mathrm{Re}[F(\omega)]=u(\omega)$，$\mathrm{Im}[F(\omega)]=v(\omega)$とすると（$u,v$はともに実数値をとる関数）

$$F(\omega)=u(\omega)+i\,v(\omega)$$

スペクトルの図としては，$u(\omega)$のグラフと$v(\omega)$のグラフを表示する．

【ケース２】$F(\omega)$の複素数値を極形式で表すこともできる：

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{i\phi(\omega)},\quad \tan\phi=\frac{\mathrm{Im}[F]}{\mathrm{Re}[F]}\quad\left(\phi(\omega)=\arctan\frac{\mathrm{Im}[F]}{\mathrm{Re}[F]}\right)$$

スペクトルの図としては，$|F(\omega)|$のグラフ（振幅スペクトル）と$\phi(\omega)$のグラフ（位相スペクトル）を表示する．場合によっては$|F(\omega)|^2$のグラフ（パワースペクトル）と$\phi(\omega)$のグラフを表示することもある．位相は$0\le\phi<2\pi$あるいは$-\pi\le\phi<\pi$のように値を制限して表すこともある．

例えば例題 03 で学んだ関数

$$f(t)=\begin{cases}e^{-at}\cdots 0<t\\ 0\cdots \text{その他}\end{cases}\qquad(a>0)$$

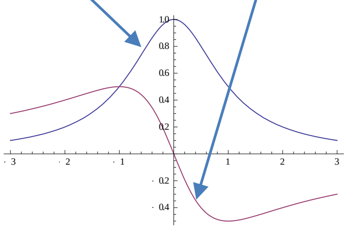
の(フーリエ変換の)スペクトルは

$$F(\omega)=\frac{1}{a+i\omega}=\frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}$$

だから

$$\mathrm{Re}[F(\omega)]=\frac{a}{a^2+\omega^2},\quad \mathrm{Im}[F(\omega)]=\frac{-\omega}{a^2+\omega^2}$$

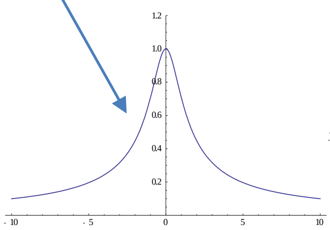
の２つのグラフ

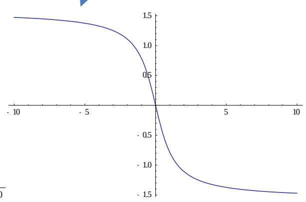


を描いてもよいし

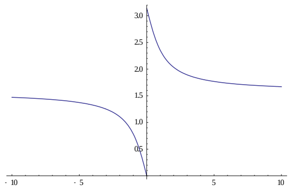
$$|F(\omega)|=\left|\frac{1}{a+i\omega}\right|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}},\quad \phi(\omega)=\arctan\left(-\frac{\omega}{a}\right)$$

の２つのグラフ





でもよい．上例では位相のスペクトルは$-\pi\le\phi<\pi$としたが，同じ内容を$0\le\phi<2\pi$で表すと



のようになる．

Q. 問題演習の際に、式変形の手順はどこまでが自明として省略してよいか教えてください。

A. 自習のときは，後で見直した時にどんな計算をしたかが分かるならよい（したがって，省略の程度は各自の習熟度によって異なる）．だが，試験のときは，自分が分かっていることを示す必要があるので，採点者に見てほしいことを省略はできない．

教科書は説明のために式をたくさん書くが，研究論文では正しい結論なら（式の導出を論じる場合は別として）要点だけを書き，世の中の常識を書く必要はない（総説というジャンルは少し違う）．論文の読者は，あらためて常識を勉強するために論文を読むわけではないのだから．何が常識かは，多くの論文を読んでなければ分からない．