

DFT

練習

問0

データ数=Nの $\{f_k\}$ に対するDFT $\{F_m\}$ の式を書け

定義

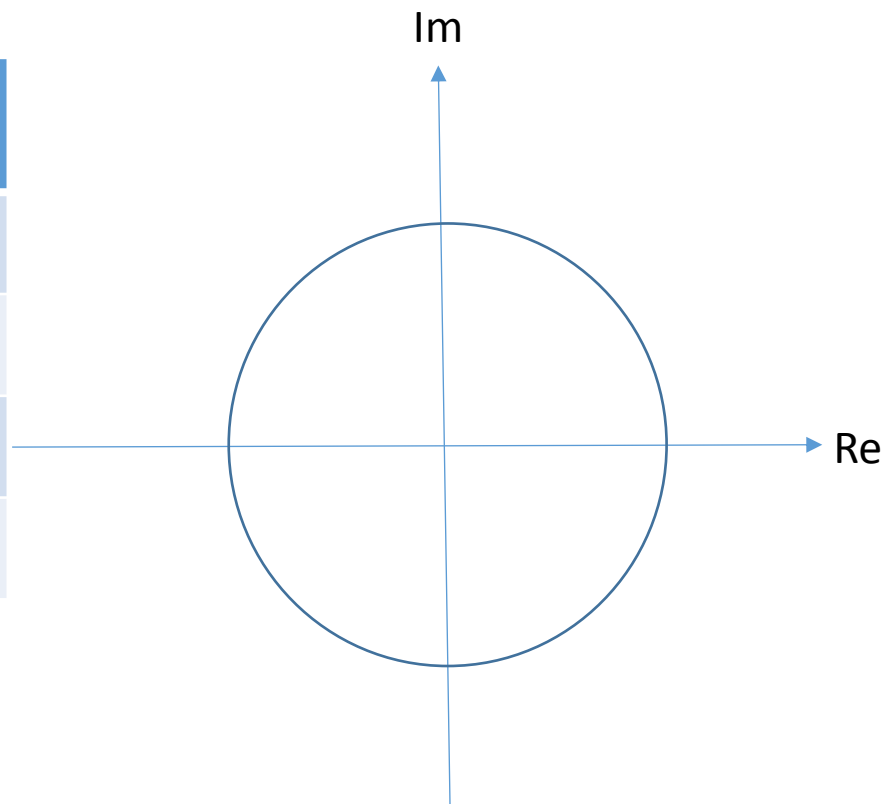
- データ: $\{f_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$
 $f_k = f(k\tau_s)$

- DFT: $\{F_m\}$, $m = 0, \dots, N - 1$
$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} k m}$$

問1

N=4のときの位相因子の表を書き，複素平面上にプロットせよ

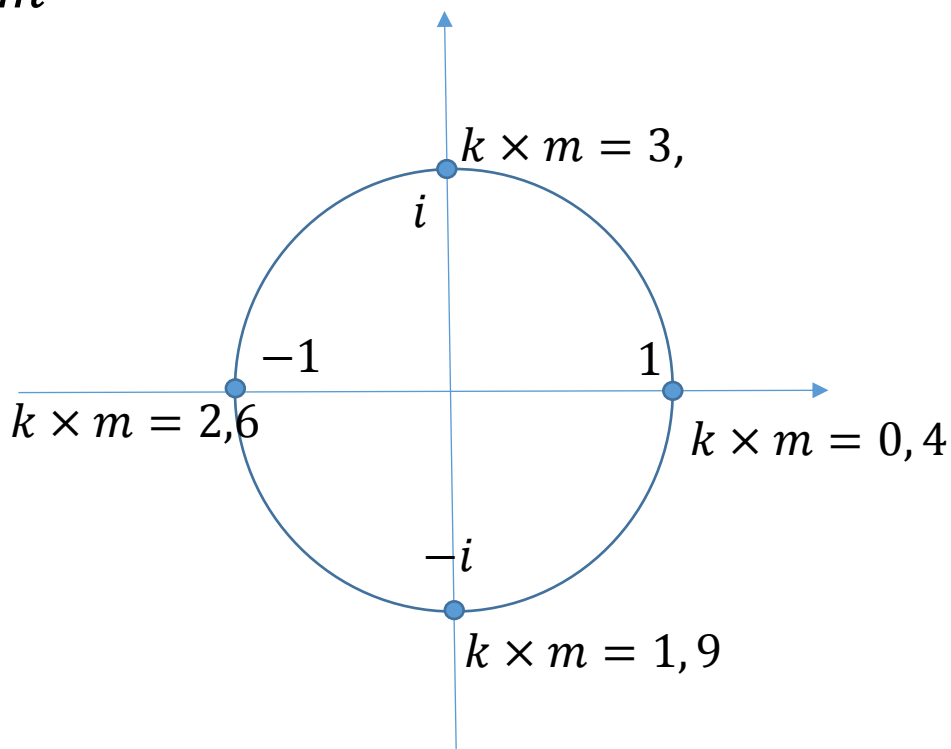
k → m ↓	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				



問1 N=4のときの位相因子を 複素平面上にプロットせよ

$$e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} \rightarrow e^{-\frac{2\pi i}{4}k \cdot m}$$

k→ m↓	0	1	2	3
0	0 (1)	0 (1)	0 (1)	0 (1)
1	0 (1)	1 (-i)	2 (-1)	3 (i)
2	0 (1)	2 (-1)	4 (1)	6 (-1)
3	0 (1)	3 (i)	6 (-1)	9 (-i)



問2

N=4のときのDFTの定義式を行列形式で書け

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

問2 N=4のときのDFTの定義式を 行列形式で書け

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 1} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 2} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 3} \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 2} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 4} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 6} \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 3} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 6} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

問3 信号 $f = \{1, 1, 1, 1\}$ について

- DFTを計算せよ
- サンプリング時間が1秒のとき, DFTの各成分の振動数は?
- DFTの絶対値と位相のスペクトルは?

問3 $f = \{1, 1, 1, 1\}$ について

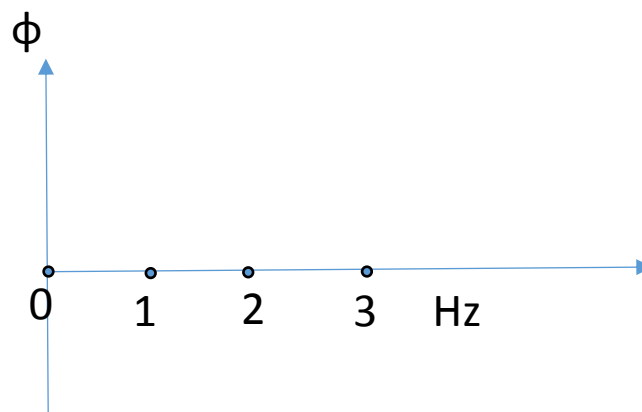
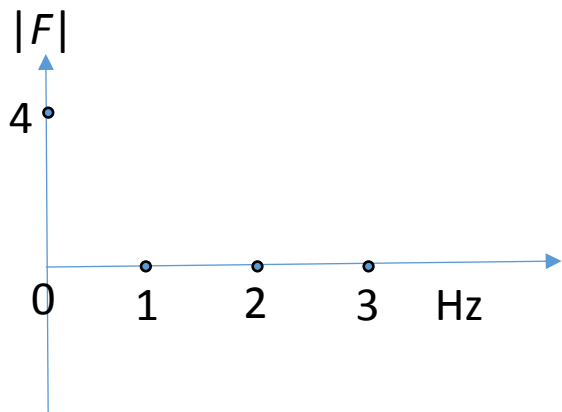
- DFTを計算せよ

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- サンプリング時間が1秒のとき, DFTの各成分の振動数は?

$$\Omega_S = 2\pi \text{ rad/s, (1 Hz)}$$

- DFTの絶対値と位相のスペクトルは?



問4 信号 $f = \{1, 0, 1, 0\}$ について

- DFTを計算せよ
- F_0 の値から信号強度の平均を求めよ
- サンプリング時間が1sのとき, DFTから得られる振動数成分を推定せよ

問4 $f = \{1, 0, 1, 0\}$ について

- DFTを計算せよ

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- F_0 の値から信号強度の平均を求めよ

$$\frac{1}{N} F_0 = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

- サンプリング時間が1sのとき, DFTから得られる振動数成分を推定せよ

2 Hz, 4 Hz, ...

問5 信号 $f = \{0, 1, 0, 1\}$ について

- DFTを計算せよ
- $f = \{1, 0, 1, 0\}$ のDFTと比較せよ

問5 $f = \{0, 1, 0, 1\}$ について

- DFTを計算せよ

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $f = \{1, 0, 1, 0\}$ のDFTと比較せよ
 - 時間シフト \Rightarrow 位相シフト

問6 信号 $f = \{0, 1, 1, 0\}$ について

- DFTを計算せよ
- $T=1\text{s}$ として DFTスペクトル(絶対値と位相)を書け
- 他のデータの例も含めて以下を確認せよ
 - $\text{Re}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = \text{Re}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right], \text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = -\text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right], \left|F_{\frac{N}{2}+m}\right| = \left|F_{\frac{N}{2}-m}\right|$
 - $\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |F_m|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2$

問6 $f=\{0,1,1,0\}$ について

- DFTを計算せよ

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 0 \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $T=1\text{s}$ として DFTスペクトル(絶対値と位相)を書け

$$|F|=\{2, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}, \quad \phi=\{0, -3\pi/4, 0, 3\pi/4\}$$

- 他のデータの例も含めて以下を確認せよ

- $\text{Re}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = \text{Re}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right], \text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = -\text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right], |F_{\frac{N}{2}+m}| = |F_{\frac{N}{2}-m}|$
- $\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |F_m|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2$

問7 DFTの逆変換の定義式を書け

- データ数 N の場合
- $N=4$ の場合の行列形式による表示

問7 DFTの逆変換の定義

データ数Nの場合

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+\frac{2\pi i}{N} k \cdot m}$$

N=4の場合について、行列形式で書け

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 1} & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 2} & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 3} \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 2} & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 4} & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 6} \\ 1 & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 3} & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 6} & e^{+\frac{2\pi i}{4} \times 9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問8 次のDFTを逆変換せよ

$$\bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - i \\ 0 \\ -1 + i \end{pmatrix}$$

問8 $F = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 0 \\ -1+i \end{pmatrix}$ を逆変換せよ

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 0 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

問9 データ数Nの信号{f}と{g}の 畳み込み積分の式を書け

- Nが一般の場合
- $f = \{0,1,1,0\}$ と $g = \{0,1,0,1\}$ の場合

問9 たたみ込み積分

$$(f * g)_k \equiv \sum_{j=0}^{N-1} f_j g_{k-j} \quad (\text{ただし } g_{-j} = g_{N-j})$$

- $f = \{0, 1, 1, 0\}$ と $g = \{0, 1, 0, 1\}$ のたたみ込みは？

$$\begin{aligned} (f * g)_0 &\equiv \sum_{j=0}^3 f_j g_{-j} = f_0 g_0 + f_1 g_{-1} + f_2 g_{-2} + f_3 g_{-3} \\ &= f_0 g_0 + f_1 g_3 + f_2 g_2 + f_3 g_1 = 0 + 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f * g)_1 &\equiv \sum_{j=0}^3 f_j g_{1-j} = f_0 g_1 + f_1 g_0 + f_2 g_{-1} + f_3 g_{-2} \\ &= f_0 g_1 + f_1 g_2 + f_2 g_3 + f_3 g_2 = 1 \end{aligned}$$

$$(f * g)_2 \equiv \sum_{j=0}^3 f_j g_{2-j} = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 + f_3 g_{-1} = 1$$

$$(f * g)_3 \equiv \sum_{j=0}^3 f_j g_{3-j} = f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_3 g_0 = 1$$

問10 たたみ込み積分のDFT

$$f = \{0, 1, 1, 0\} \rightarrow F = \{2, \quad -1 - i, \quad 0, \quad -1 + i\}$$
$$g = \{0, 1, 0, 1\} \rightarrow G = \{2, \quad 0, \quad -2, \quad 0 \quad \}$$

を既知としてDFTどうしの積 $F \cdot G$ を求めよ

$f * g$ のDFTと $F \cdot G$ を比較せよ

$F \cdot G$ を逆変換し, $f * g$ と比較せよ

問10 たたみ込み積分のDFT

- $f = \{0,1,1,0\} \rightarrow F = \{2, -1 - i, 0, -1 + i\}$
- $g = \{0,1,0,1\} \rightarrow G = \{2, 0, -2, 0\}$
- $F \cdot G = \{4,0,0,0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $f * g = \{1,1,1,1\} \rightarrow \{4,0,0,0\}$

FFT

<http://laputa.cs.shinshu-u.ac.jp/~yizawa/InfSys1/basic/chap7/index.htm>

を参照してFFTのアルゴリズムを考察せよ.