

4章 離散フーリエ変換

3章で学んだフーリエ変換は「連続的に続く信号波形に複素指数関数をかけて積分した」ものであった。しかし信号波形は、とびとびの時間間隔で測定し、離散的な量として記録するのが普通である。この章では、測定された離散的なデータのフーリエ変換（離散フーリエ変換）の特徴とその計算のアルゴリズムについて学ぶ。

§4.1 離散フーリエ変換の定義式とフーリエ級数

【デジタル的な記録】

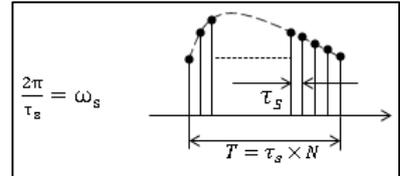
有限の測定時間 T の間に、サンプリング間隔 τ_s で（とびとびの時間に）測定して得た総数 $N(=T/\tau_s)$ 個のデータから、信号波形に含まれる振動成分を推定するのが離散フーリエ変換である。もとのアナログ信号が $f(t)$ であり、サンプリング時刻を

$$t_k = k\tau_s, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

とすると、波形のデータは

$$\{f_k\} = \{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$$

という N 個の数の組となる。



【DFT, 離散フーリエ変換の定義】

次の総和

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} m \cdot k}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

により計算される N 個の数の組

$$\{F_m\} = \{F_0, F_1, \dots, F_{N-1}\}$$

を $\{f_k\}$ のDFT(離散フーリエ変換)という。

上の定義式を変換行列 W とデータ・ベクトル $\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$ の形式を用いた表記にすると：

$$F = W_{[N]} f \rightarrow \begin{pmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{[N]0,0} & \dots & W_{[N]0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{[N]N-1,0} & \dots & W_{[N]N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad W_{[N]m,k} = e^{-\frac{2\pi i}{N} m \cdot k} = W_{[N]k,m}$$

$$W_{[N]} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{N} \times 0 \times 0} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N} \times 0 \times (N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\frac{2\pi i}{N} \times (N-1) \times 0} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N} \times (N-1) \times (N-1)} \end{pmatrix}$$

問 01 $e^{\frac{2\pi i}{4} \times 0}, e^{\frac{2\pi i}{4}}, e^{\frac{2\pi i}{4} \times 2}, e^{\frac{2\pi i}{4} \times 3}$ を複素平面上にプロットし、その値を記せ、

答 01 $N=4$ では、単位円を4等分する位置（うち1個は「1」）

$$e^{\frac{2\pi i}{4} \times 0} = 1, \quad e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad e^{\frac{2\pi i}{4} \times 2} = e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{2\pi i}{4} \times 3} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i$$

問 02 データ総数が $N=2$ と $N=4$ の場合について変換行列 $W_{[2]}$ と $W_{[4]}$ を具体的な数で書け。

答 02

$$W_{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_{[4]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

【逆 DFT, 離散逆フーリエ変換】

DFT すなわち

$$\{F_m\} = \{F_0, F_1, \dots, F_{N-1}\}$$

から, もとの信号波形 (ただし離散)

$$\{f_k\} = \{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$$

を再現する変換が離散逆フーリエ変換である.

幸運なことに, 逆変換は変換の複素共役をとるだけでよい. すなわち, 逆変換の行列を $W^{[N]-1}$ とすると

$$W_{[N]}^{-1} = \begin{pmatrix} W_{[N]0,0}^{-1} & \cdots & W_{[N]0,N-1}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{[N]N-1,0}^{-1} & \cdots & W_{[N]N-1,N-1}^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \overline{W_{[N]}} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \overline{W_{[N]0,0}} & \cdots & \overline{W_{[N]0,N-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{W_{[N]N-1,0}} & \cdots & \overline{W_{[N]N-1,N-1}} \end{pmatrix}$$

$$W_{[N]m,k}^{-1} = \frac{1}{N} \overline{W_{[N]m,k}} = \frac{1}{N} e^{+j\frac{2\pi}{N}m \cdot k} = W_{[N]k,m}^{-1}$$

である.

問 03 $W_{[2]}^{-1}$ と $W_{[4]}^{-1}$ を具体的な数によって表し, $W_{[2]}^{-1} \cdot W_{[2]} = E_{[2]}$, $W_{[4]}^{-1} \cdot W_{[4]} = E_{[4]}$ ととなることを確認せよ. ただし $E_{[2]}$ と $E_{[4]}$ はそれぞれ 2 次元と 4 次元の単位行列である.

答 03

$$W_{[2]}^{-1} \cdot W_{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_{[4]}^{-1} \cdot W_{[4]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & +i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & +i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N 次元で前問と同様の確認をするには, 計算の準備が必要となる.

問 04 $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ として,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} n \cdot k} = \delta_{n,0}$$

を示せ. ただし右辺はクロネッカのデルタである.

答 04 $n = 0$ のとき $e^{\frac{2\pi i}{N} n \cdot k} = e^{\frac{2\pi i}{N} 0 \cdot k} = e^0 = 1$ だから

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} n \cdot k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{N} = 1$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N-1$ のとき

まず $e^{\frac{2\pi i}{N} n \cdot k} = \left(e^{\frac{2\pi i}{N} n}\right)^k \equiv r^k$ とおき, $s_N \equiv \sum_{k=0, N-1} r^k = 1 + r + \dots + r^{N-1}$ を求めると

$$r \times s_N - s_N = (r-1)s_N = r^N - 1 \rightarrow \sum_{k=0, N-1} r^k = \frac{r^N - 1}{r - 1}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} n \cdot k} = \frac{\left(e^{\frac{2\pi i}{N} n}\right)^N - 1}{\left(e^{\frac{2\pi i}{N} n}\right) - 1}$$

右辺分子に注目すると

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{N} n}\right)^N = \left(e^{\frac{2\pi i}{N} N}\right)^n = (e^{2\pi i})^n = 1^n = 1$$

となるから

$$\text{整数 } n (\neq 0) \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} n \cdot k} = 0$$

となる。以上をまとめると題意が示される。

問 05 $W_{[N]}W_{[N]}^{-1} = E_{[N]}$ を成分を用いた計算により示せ。

答 05

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_{[N]\ell,k} \cdot W_{[N]k,m}^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} \ell \cdot k} \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} \ell \cdot k} \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} (m-\ell) \cdot k} = \delta_{\ell,m}$$

最後の等号は問 04 において $n \rightarrow m - \ell$ とした。

【フーリエ級数と DFT の比較】

測定時間 T 内に等サンプリング間隔で得た N 点のデータ $\{f_k\}$ の DFT とその逆変換 $\{F_m\}$:

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} m \cdot k}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+\frac{2\pi i}{N} k \cdot m}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

この定義式と、すでに学んだフーリエ級数の式

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T} m \cdot t} dt,$$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{+\frac{2\pi i}{T} m \cdot t}$$

を比較すると、非常によく似ていることに気づくが差異もある。

【離散的なデータでフーリエ係数を求める】

データが離散的だから、積分が正確にはできない。そこで、定積分を N 点の総和（リーマン和）で近似すると ($dt \rightarrow \Delta t = \tau_s$)

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T} m \cdot t} dt \approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-\frac{2\pi i}{T} m \cdot t_k} \tau_s = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-\frac{2\pi i}{T} m \cdot t_k} \left(\frac{T}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-\frac{2\pi i}{T} m \cdot k \tau_s} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-\frac{2\pi i}{N} m \cdot k}$$

となり

$$c_m (m = -\infty, \dots, +\infty) \leftrightarrow \frac{F_m}{N} (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

という対応がつく。すなわち、DFT はフーリエ係数と等価なものである。

離散的なサンプリングのために、もとの信号に $\frac{2\pi}{\tau_s}$ より大きな振動数の成分が入っていても、それを検知することはできない :

- もとの信号に $\frac{2\pi}{\tau_s}$ という振動数成分が含まれるとき、この成分は「サンプリング間隔 τ_s で 1 回振動する」からちょうど τ_s 経過すると (1 周期になる) 同じ値となる。サンプリング点のところだけで見ていると「値が一定の関数」と見分けがつかない。 $\frac{2\pi}{\tau_s} = N \times \frac{2\pi}{T}$ だから (F_m が $m \times \frac{2\pi}{T}$ の振動数をもつ DFT 成分であることを思い出すと) F_N は F_0 と区別できず、 $\frac{2\pi}{\tau_s}$ の成分の有無は判定できない。
- もとの信号に $\frac{2\pi}{\tau_s} = N \times \frac{2\pi}{T}$ より大きな振動数の成分がふくまれるとき、その成分はサンプリング間隔 τ_s の間で何度も振動することになるが、サンプリング点のところだけ見ていると「 $0 < m < N$ の振動」と見分けがつかない。

こうして、DFT として意味のある振動数成分は $m = 0, 1, \dots, N-1$ だけになる。もとの信号から $\frac{2\pi}{\tau_s}$ より高い振動数成分を除去しておかないと、(ほんとうは低い振動数の成分がなくても、あたかも $\frac{2\pi}{\tau_s}$ より低い振動数をもつように見えてしまう) 偽のスペクトルを得ることになる。

もっと詳細に見るとさらに厳しい制約があることがわかる。もとの信号に $\frac{2\pi}{\tau_s} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\tau_s}$ より大きな振動数の成分がふくまれていると、それをサンプリングして得た DFT のスペクトルは真のスペクトルと異なるものになってしまう。直感的には、ひとつのサイン (コサイン) 波をサンプリングしてその周期を知るには、連続した「山・谷・山」の 3 点を読み取る必要がある。山から山が 1 周期なので、信号の 1/2 周期よりサンプリング間隔 τ_s が短くなければならない。これを **サンプリング定理 (標本化定理)** という (ナイキストの定理, ナイキスト・シャノンの定理ともいう)。

総和の範囲を $m = 0, 1, \dots, N-1$ とし、 $f(t)$ のフーリエ級数の式に対応 $c_m \leftrightarrow \frac{F_m}{N}$ を代入すると離散逆フーリエ変換の式を得る。

問 06 DFT の定義として

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} m \cdot k}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad f_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+\frac{2\pi i}{N} k \cdot m}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

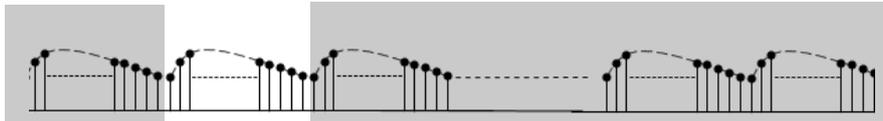
を採用する場合がある (mathematica)。この 2 式が整合すること (変換行列と逆行列の関係が正しく成立していること) を確認せよ。つぎに、この定義によるフーリエ係数と DFT の関係を調べよ。

答 06 略

なお、DFT の定義として複素指数関数の引数の符号を反転して $F_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{+\frac{2\pi i}{N} m \cdot k}$ とする場合もあるので注意せよ (mathematica)。このとき逆変換でも符号が反転する。

【離散フーリエ変換の解釈】

フーリエ級数は周期 T で繰り返される波形 $f(t)$ を前提とするので、測定時間 T の外側について何もデータを持たない DFT の議論とは同一ではない。しかし、データが無いなら、それをどのように仮定するかについては (その仮定がもっともらしいなら) ある程度の任意性はあるだろう。そこで、測定時間の外側で同じデータが繰り返されると仮定すると、DFT は離散データに基づくフーリエ係数であると理解してもよさそうである。そうならば、DFT やその逆変換を持つ特性は、フーリエ級数の特性とほとんど同じだが、データが離散的になったことによる特別な性質が現れると期待される。



【離散化された DFT スペクトル】

DFT $\{F_m\}$ は数の並びだから、これを実際の振動数成分と対応させるには、第 m 成分が

$$F_m: \omega_m = m \times \frac{2\pi}{T}$$

という振動数の成分であると読みなおす。となりあう振動数成分の間隔が $\frac{2\pi}{T}$ であり、これが DFT スペクトルの分解能となる。また、DFT スペクトルに現れる最小の振動数は 0、最大の振動数は $(N-1) \frac{2\pi}{T}$ である。

問 07 周期 T の波形はフーリエ級数により表せることをもとに、DFT 逆変換で再構築した波形 $f(t)$ の振動数成分について考察せよ。

答 07 周期 T の波形のフーリエ級数は、振動数成分として $\frac{2\pi}{T}$ の整数倍だけを含む。したがって、DFT の再構築波形も $\frac{2\pi}{T}$ の整数倍の振動数成分を含む。ただし、離散的なサンプリングのためにある程度高い振動数成分は除外されるだろう。

問 08 測定時間が $T = 10$ s、データ点の総数が $N = 1000$ の離散的データをもとに DFT を求めて振動数スペクトル (どのような振動数のものがどれほど含まれるか) を分析するとき、(角) 振動数の分解能はどれだけか。

答 08 $\frac{1}{T} \approx \frac{1}{10} \text{ Hz} = 0.1 \text{ Hz}$ $\left(\frac{2\pi}{T} \approx 0.628 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$

§ 4.2 DFT の性質 (その 1)

DFT には、フーリエ係数の性質と離散化による性質の両方が含まれる。具体的な事例でそれを見ていくことにする。

数学的な道具として、複素指数関数の総和が現れる。

1) $r (\neq 1)$ が複素数であっても、次の等比級数の部分和の式が成立する：

$$s_N \equiv 1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = \sum_{m=0}^{N-1} r^m \rightarrow (r-1)s_N = r \times s_N - s_N = r^N - 1 \rightarrow s_N = \frac{r^N - 1}{r - 1}$$

2) $r = e^{\frac{2\pi i \ell}{N}}$ ($\ell = 1, \dots, N-1, r \neq 1$) とすると

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i \ell}{N} \times m} = \frac{e^{\frac{2\pi i \ell}{N} \times N} - 1}{e^{\frac{2\pi i \ell}{N}} - 1} = 0 \quad \dots \quad \ell = 1, \dots, N-1$$

3) $r = e^{\frac{2\pi i \ell}{N}} = 1$ ($\ell = 0$) のとき

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i \ell}{N} \times m} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} \times 0} = \sum_{m=0}^{N-1} 1 = N \quad \dots \quad \ell = 0$$

4) 以上をまとめクロネッカの δ によって表すと

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i \ell}{N} \times m} = N \delta_{\ell,0}$$

5) $\ell = q$ が非整数の場合、総和は実部も虚部も q の関数になり、いずれも 0 とはならない：

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} q m} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{N} q \times N} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N} q} - 1} = \frac{e^{2\pi i q} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{N} q} - 1} = \frac{(e^{\pi i q} - e^{-\pi i q}) e^{\pi i q}}{(e^{\pi i \frac{q}{N}} - e^{-\pi i \frac{q}{N}}) e^{\pi i \frac{q}{N}}} = \frac{(e^{\pi i q} - e^{-\pi i q})}{(e^{\pi i \frac{q}{N}} - e^{-\pi i \frac{q}{N}})} e^{\pi i q(1-1/N)} = \frac{\sin(\pi q)}{\sin(\frac{\pi q}{N})} \left\{ \cos\left(\pi q \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) + i \sin\left(\pi q \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) \right\}$$

問 09 すぐ上の計算 1)~5)を確認せよ。

答 09 略

以下、具体例を用いて DFT の性質を見ることにする。

【第 0 成分 F_0 】

問 10 $f(t) = C$ すなわち信号強度が常に一定 (言い換えると直流) のとき、測定時間 T 内で N 点のサンプリングを行ったときの DFT を求め、意味を述べよ。信号の性質を正しく反映した結果になったか。サンプリング間隔を半分 (データ数を 2 倍) にしたとき、DFT はどのように変わるか。

答 10

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} m \cdot k} = C \times \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} m \cdot k} = CN \delta_{m,0}$$

$$F_0 = CN, F_m = 0 \dots m \neq 0$$

振動数 0 の (直流) 成分だけがゼロでなく、信号波形の性質は DFT に正しく反映されている。 F_0 はデータ数 N に比例するので、総数が 2 倍になると F_0 の大きさも 2 倍になる。

問 10 N 個のデータ $\{f_k\}$ の DFT $\{F_m\}$ について、その第 0 成分 F_0 の意味を調べよ。

答 10 DFT の定義

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} m \times k}$$

において $m = 0$ とおくと $e^{-\frac{2\pi i}{N} 0 \times k} = e^0 = 1$ だから

$$F_0 = \sum_{k=0}^{N-1} f_k = \frac{1}{\tau_s} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \tau_s \approx \frac{N}{T} \int_0^T f(t) dt$$

すなわち、 F_0 は波形を表すグラフの面積 $\int_0^T f(t) dt$ に比例する。

DFT を $\{F_m\}, m = 1, \dots, N$ とすることもあり、そのときは F_N が直流成分を表す項である。

【測定時間が周期と等しい単振動の DFT】

問 11 $f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, すなわち観測時間 T 内にちょうど 1 周期分振動するコサイン波形を N 点サンプリングしたときの DFT を求めよ。 $m = 0, \dots, N-1$ を拡張し $-N < m < 2N$ の範囲で調べよ。 $-N < m < 2N$ で DFT スペクトルを図で示せ。 ヒント: コサイン関数を複素指数関数で表して f_k を書け。

答 11

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \rightarrow f_k = f(k\tau_s) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}k\tau_s\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}k} + e^{-\frac{2\pi i}{N}k}\right)$$

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(1-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(1+m)k}\right)$$

$F_m \neq 0$ は $m = -N+1, 1, N+1$ のとき、最右辺第 1 項

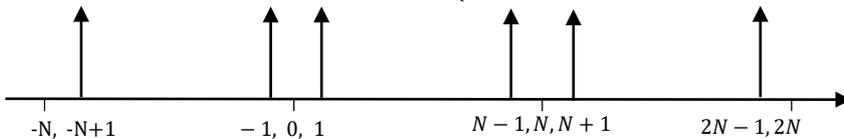
$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(1-m)k} = N$$

および $m = -1, N-1, 2N-1$ のときの最右辺第 2 項

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(1+m)k} = N$$

の寄与で生じる。 よって

$$F_m = \begin{cases} \frac{N}{2} \dots m = -N+1, -1, 1, N-1, N+1, 2N-1 \\ 0 \dots \text{その他} \end{cases}$$



DFT は実数であり、 $F_{-m} = F_m = \overline{F_m}$ である。

問 12 $f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT を求めよ。

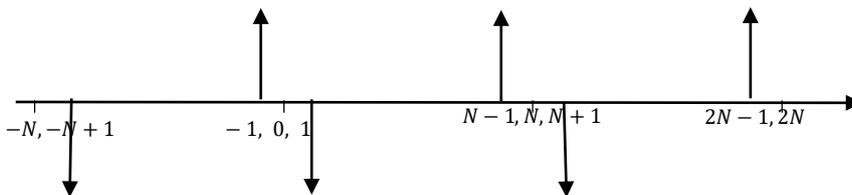
答 12

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \rightarrow f_k = f(k\tau_s) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}k\tau_s\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}k} - e^{-\frac{2\pi i}{N}k}\right)$$

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk}\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(1-m)k} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(1+m)k}\right)$$

$$F_m = \begin{cases} \frac{N}{2i} = -\frac{N}{2}i \dots m = -N+1, 1, N+1 \\ -\frac{N}{2i} = \frac{N}{2}i \dots m = -1, N-1, 2N-1 \\ 0 \dots \text{その他} \end{cases}$$

DFT は純虚数となる。 $F_{-m} = \overline{F_m}$ である。



問 11,12 は、周期が T と正確に一致する単一振動数の波形 $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ であり、そのフーリエ級数による表示は

$$f_c(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2}e^{(1 \times \frac{2\pi i}{T})t} + \frac{1}{2}e^{(-1 \times \frac{2\pi i}{T})t}, \quad f_s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2i}e^{(1 \times \frac{2\pi i}{T})t} - \frac{1}{2i}e^{(-1 \times \frac{2\pi i}{T})t}$$

となるので、フーリエ係数は $c_{c_1} = c_{c_{-1}} = \frac{1}{2}$, $c_{s_1} = \overline{c_{s_{-1}}} = \frac{1}{2i}$ したがって基本振動数 $\frac{2\pi}{T}$ の振動数成分だけが存在する。この結論は DFT とフーリエ級数で相似である。すなわち F_m と F_{-m} をそれぞれ c_m と c_{-m} に対応させると、偶関数のフーリエ係数が実数また奇関数のフーリエ係数が純虚数、両者に同時に対応可能な表現として $c_{-m} = \overline{c_m}$ の関係が成り立つ。

しかし、DFT スペクトルは $m = \pm 1$ 以外にも成分が見られる。これは離散化のために引き起こされた現象である。

【測定時間 T が周期の整数倍となるサインとコサインの DFT】

さらに、重ね合わせにより、位相と振幅を任意に設定できるようにした。

問 13 ℓ が正の整数($< N$)のとき $f(t) = A \cos\left(\ell \frac{2\pi}{T}t\right) + B \sin\left(\ell \frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT を求めよ。 $0 \leq m < N$ とせよ。
 答 13 DFT 変換は（行列で書けることから分かるように）線形変換なので、 $\cos\left(\ell \frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT と $\sin\left(\ell \frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT を求め、それぞれ A 倍と B 倍して加算すれば答えになる。

$$f_{c_k} = f_c(k\tau_s) = \cos\left(\ell \frac{2\pi}{T}k\tau_s\right) = \cos\left(\ell \frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}k\ell} + e^{-\frac{2\pi i}{N}k\ell}\right), \quad F_{c_m} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{c_k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\ell+m)k}\right)$$

$$f_{s_k} = f_s(k\tau_s) = \sin\left(\ell \frac{2\pi}{T}k\tau_s\right) = \sin\left(\ell \frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2\pi i}{N}k\ell} - e^{-\frac{2\pi i}{N}k\ell}\right), \quad F_{s_m} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{s_k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-m)k} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\ell+m)k}\right)$$

よって

$$F_{c_m} = \begin{cases} \frac{N}{2} \dots m = \ell \\ \frac{N}{2} \dots m = N - \ell \\ 0 \dots \text{その他} \end{cases} \quad F_{s_m} = \begin{cases} -\frac{N}{2}i \dots m = \ell \\ \frac{N}{2}i \dots m = N - \ell \\ 0 \dots \text{その他} \end{cases}$$

$$F_m = AF_{s_m} + BF_{c_m} = \begin{cases} \frac{N}{2}(A - Bi) \dots m = \ell \\ \frac{N}{2}(A + Bi) \dots m = N - \ell \\ 0 \dots \text{その他} \end{cases}$$

$0 \leq m < N$ の範囲で、振動数成分は $m = \ell$ と $N - \ell$ が0ではなく互いに複素共役。コサイン成分が実部、サイン成分が虚部を与える。データの総数に比例した大きさをもつ。

問 14 ℓ が正の整数($< N$)のとき $f_1(t) = \cos\left(\ell \frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT と $f_2(t) = \cos\left((N - \ell) \frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT を比較せよ。
 答 14

$$F_{1_m} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{1_k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\ell+m)k}\right)$$

$$F_{2_m} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{2_k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(N-\ell-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-\ell+m)k}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i} e^{\frac{2\pi i}{N}(-\ell-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i} e^{-\frac{2\pi i}{N}(-\ell+m)k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(-\ell-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(-\ell+m)k}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\ell+m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-m)k}\right) = F_{1_m}$$

全く同じになり区別できない。これはデータの離散化による結果である。

問 15 ℓ が正の整数($< N$)のとき $f_1(t) = \sin\left(\ell\frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT と $f_2(t) = \sin\left((N-\ell)\frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT を比較せよ。

答 15

$$F_{1m} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{1k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-m)k} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\ell+m)k} \right)$$

$$F_{2m} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{2k} e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(N-\ell-m)k} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-\ell+m)k} \right) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i} e^{\frac{2\pi i}{N}(-\ell-m)k} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i} e^{-\frac{2\pi i}{N}(-\ell+m)k} \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(-\ell-m)k} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(-\ell+m)k} \right) = \frac{-1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\ell+m)k} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-m)k} \right) = -F_{1m}$$

符号が反転するが大きさは同じ。

問 16 $f_1(t) = A\cos\left(\ell\frac{2\pi}{T}t\right) + B\sin\left(\ell\frac{2\pi}{T}t\right)$ と $f_2(t) = A\cos\left((N-\ell)\frac{2\pi}{T}t\right) + B\sin\left((N-\ell)\frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT パワースペクトル ($|F_m|^2$) を比較せよ。

答 16

$$F_{1m} = \begin{cases} \frac{N}{2}(A - Bi) \cdots m = \ell \\ \frac{N}{2}(A + Bi) \cdots m = N - \ell \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}, \quad F_{2m} = \begin{cases} \frac{N}{2}(A + Bi) \cdots m = \ell \\ \frac{N}{2}(A - Bi) \cdots m = N - \ell \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

よって

$$|F_{1m}|^2 = |F_{2m}|^2$$

となり区別できない。

【サンプリング間隔より周期が短い単振動の DFT】

問 17 $\ell' = N + \ell, 0 \leq \ell < N$ なる整数 ℓ' について $f(t) = \cos\left(\ell'\frac{2\pi}{T}t\right)$ という波形の DFT が $f(t) = \cos\left(\ell\frac{2\pi}{T}t\right)$ の DFT と同じになることを示せ。 答 17

$$f_k = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\ell'k\right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi i}{N}\ell'k} + e^{-\frac{2\pi i}{N}\ell'k} \right)$$

$$\rightarrow F_m = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell'-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\ell'+m)k} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(N+\ell-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(N+\ell+m)k} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(\ell+m)k} \right)$$

この波形の周期は $\frac{T}{\ell'} = \frac{T}{N+\ell} < \tau_s$ すなわちサンプリング間隔よりも短い。言い換えると、サンプリング間隔のなかで 1 回以上振動する。このときの DFT は振動数が $\ell\frac{2\pi}{T}$ の場合 (すなわち $N\frac{2\pi}{T}$ だけダウン・シフトしたもの) と同じになる。

【離散化データから振動成分の情報を引き出すときの問題点】

以上をまとめると、測定時間が周期の整数倍となる単振動の重ね合わせとして表される波形では、

- DFT スペクトルは基本的にはフーリエ係数を見ていると考えてよい。しかし、離散化データによる解析のために異常が起きる。それは
- サンプリング間隔より短い周期の振動数成分は $N\frac{2\pi}{T}$ だけ低い振動数の DFT として現れる。さらに
- $F_m = \overline{F_{N-m}}$ 、すなわちスペクトルが「最大振動数 $N\frac{2\pi}{T}$ のほうから反転すると (複素共役だが)」ヤマビコのように同じになっている。

この最後の性質のため、もし波形に $\frac{1}{2} \times N\frac{2\pi}{T}$ より大きな振動数の成分が含まれると、「反転したスペクトル」と「する前のスペクトル」が重なり合っ
て正しい解析ができなくなる (サンプリング定理が具体化されたもの)。こうした状況はエイリアシングと呼ばれ、デジタル・サンプリングで注意
すべき重要な要素になる。

波形 $f(t)$ に含まれる振動数が $\frac{1}{2} \times N\frac{2\pi}{T}$ 以下のときは、エイリアシングは起きず、DFT スペクトルは正しくそのフーリエ成分を与え、DFT を逆変換
すると波形の離散化データ f_k が再現される。そうでないとき、エイリアシングが起き DFT スペクトルは波形の振動数成分を正しく表現しない。だ

が、エイリアシングが起きようと起きまいと、(スペクトルとしては正しくないかもしれない) DFT から逆変換をすれば、波形の離散化データ f_k が再現される。

【波形の再現】

フーリエ級数では、フーリエ係数を用いてもとの波形が

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{+\frac{2\pi i}{T} m \cdot t}$$

により再現される。振動数成分が無限に含まれることで(周期 T の波形に限るが) 任意の時刻の信号強度が計算できる。これに対して逆 DFT では

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+\frac{2\pi i}{N} k \cdot m}$$

により、有限個の DFT から、サンプリングした時刻の信号値のセットが再現される(サンプリング時刻以外での信号値はこの式から求められない)。

問 18 サンプルングしたアナログ波形が $f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \ell t\right)$, $0 \leq \ell < N$, したがって DFT が

$$F_m = \begin{cases} \frac{N}{2} \dots m = \ell, N - \ell \\ 0 \dots \text{その他} \end{cases}$$

のとき、逆 DFT の式を時間 $t_k = \tau_s \times k \rightarrow t$ により書き直した

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+\frac{2\pi i}{T} m \cdot t} = \frac{1}{2} \left(e^{+\frac{2\pi i}{T} \ell \cdot t} + e^{+\frac{2\pi i}{T} (N-\ell) \cdot t} \right)$$

は、 $t = t_k = k\tau_s$ では $f_k = f(t_k)$ ともとのデータを再現するが $t \neq t_k$ では再現しないことを確かめよ。

答 18

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T} \ell t\right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi i}{T} \ell t} + e^{-\frac{2\pi i}{T} \ell t} \right)$$

だから、 $f(t)$ の式の右辺第 2 項において

$$e^{+\frac{2\pi i}{T} (N-\ell) \cdot t} = e^{-\frac{2\pi i}{T} N \cdot t} e^{-\frac{2\pi i}{T} \ell \cdot t} = e^{-\frac{2\pi i}{T} \ell \cdot t}$$

となるのは

$$e^{-\frac{2\pi i}{T} N \cdot t} = 1$$

のときに限る。すなわち

$$Nt = T \times \text{整数} \rightarrow \frac{Nt}{T} = \frac{N}{\tau_s} = \text{整数}$$

すなわち、 $t = t_k = k\tau_s$ の場合に限り $e^{-\frac{2\pi i}{T} N \cdot t} = e^{-\frac{2\pi i}{T} N \cdot t_k} = 1$ だが、それ以外の t では $e^{-\frac{2\pi i}{T} N \cdot t} \neq 1$ となるので

$$\frac{1}{2} \left(e^{+\frac{2\pi i}{T} \ell \cdot t} + e^{+\frac{2\pi i}{T} (N-\ell) \cdot t} \right) \neq \cos\left(\frac{2\pi}{T} \ell t\right)$$

【基本振動数の「非」整数倍の振動数をもつ単振動の DFT】

本節 (§ 4.2) の冒頭の公式(5), すなわち

$q = \text{非整数}$ の場合、総和は実部も虚部も q の関数になり、いずれも 0 とはならない:

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} q m} = \frac{\sin(\pi q)}{\sin\left(\frac{\pi q}{N}\right)} \left\{ \cos\left(\pi q \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) + i \sin\left(\pi q \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) \right\}$$

を既知とする。基本振動数の「非」整数倍の振動数 $\left(\frac{2\pi}{T} q t\right)$ をもつ単振動

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T} q t\right) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi i}{T} q t} + e^{-\frac{2\pi i}{T} q t} \right)$$

の DFT

$$F_m = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(q-m)k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(q+m)k} \right)$$

は $(q-m)$ と $(q+m)$ がやはり非整数となるため、どの整数 m についても F_m がゼロとなることはない。

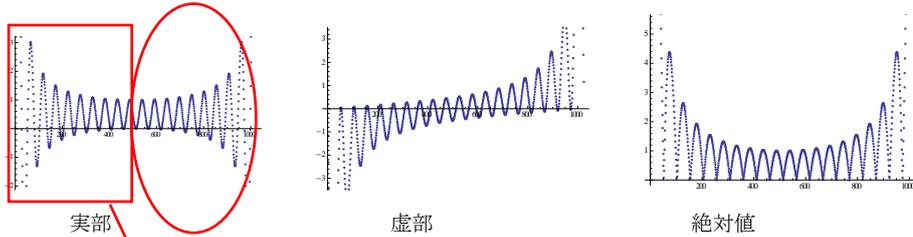
§ 4.3 DFT の性質 (その 2)

前節では単振動を例にして DFT の性質を調べたが、それらは DFT の定義から直接に導くことができる。以下、信号波形が実数のときの DFT の特徴を調べる。このときも DFT が一般的には複素数となることに注意しよう。事情はフーリエ級数と同様である：

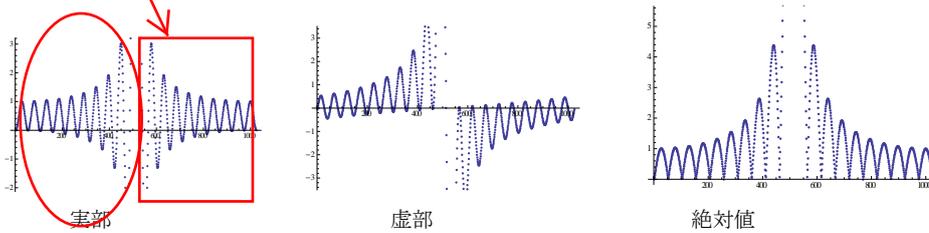
$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}km\right) - i \sum_{k=0}^{N-1} u_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}km\right)$$

【DFT の対称性】

下図はある実数 $\{f(t)\}$ の DFT の実部(左)、虚部(中)、絶対値 (右) のグラフである。この図に見られる対称性は一般的な性質である。



$F_0 \sim F_{N-1}$ のプロットだが、周期性をもとにして $F_{-N} \sim F_{-1}$ の部分を各プロットに追加してもよい：



【 F_m と F_{-m} の関係 ($\omega = 0$ の軸あるいは原点に対する対称性)】

$$F_{-m} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot (-m)} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-\frac{2\pi(-i)}{N}k \cdot m} = \overline{\sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m}} = \overline{F_m}$$

• F_m の実部は、 m について偶関数：
 $\text{Re}[F_{-m}] \stackrel{F_{-m}=F_m}{=} \text{Re}[\overline{F_m}] \stackrel{\text{複素共役の実部は同じ}}{=} \text{Re}[F_m]$

問 19 F_m の虚部は $\text{Im}[F_{-m}] = -\text{Im}[F_m]$ 、絶対値 $|F_m|$ は $|F_{-m}| = |F_m|$ となることを示せ。

答 19

• F_m の虚部は、 m について奇関数：
 $\text{Im}[F_{-m}] = \text{Im}[\overline{F_m}] \stackrel{\text{複素共役の虚部は負号を付ければ同じ}}{=} -\text{Im}[F_m]$

• $|F_m|$ は、 m について偶関数：
 $|F_{-m}| = |\overline{F_m}| = |F_m|$

【 ω 軸の目盛が $N/2$ の位置 (両端、0 から ω_s まで、の中央) に対する対称性】

• F_m の実部は $N/2$ に対して対称：

$$\text{Re}\left[F_{\left(\frac{N}{2}+m'\right)}\right] = \text{Re}\left[F_{-\left(\frac{N}{2}+m'\right)}\right] \stackrel{F_{-m}=F_{N-m}}{=} \text{Re}\left[F_{N-\left(\frac{N}{2}+m'\right)}\right] = \text{Re}\left[F_{\left(\frac{N}{2}-m'\right)}\right] \therefore \text{Re}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = \text{Re}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right]$$

問 20 F_m の虚部は $\text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = -\text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right]$, 絶対値は $|F_{\frac{N}{2}+m}| = |F_{\frac{N}{2}-m}|$ となることを示せ.

答 20

• F_m の虚部は $N/2$ に対して反対称:

$$\text{Im}[F_{-m}] = -\text{Im}\left[F_{\frac{m}{m-\frac{N}{2}+m}}\right] \stackrel{\omega}{=} -\text{Im}\left[F_{N-\frac{m}{m-\frac{N}{2}+m}}\right] \therefore \text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = -\text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right]$$

• $|F_m|$ は, $N/2$ に対して対称:

$$|F_{-m}| = \left|F_{\frac{m}{m-\frac{N}{2}+m}}\right| \stackrel{\omega}{=} |F_{N-\frac{m}{m-\frac{N}{2}+m}}| \therefore |F_{\frac{N}{2}+m}| = |F_{\frac{N}{2}-m}|$$

§ 4.4 DFT の性質(その 3)

まとめと追補

• DFT では $\{e^{\frac{2\pi i}{N}k \cdot n}\}$ が直交基底となる. 言い換えると

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}k \cdot n'} e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot n} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}k \cdot (n'-n)} = N \delta_{nn'}$$

が成り立つ. 右辺の N を基底の方にうつすと, $\{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i}{N}k \cdot n}\}$ が正規直交基底をつくるともいえる.

• DFT を計算する和の範囲を変更できる. 周期関数を 1 周期にわたり積分するとき下限の選び方は自由であると同様である:

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} = \sum_{k=0}^{p-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} + \sum_{k=p}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} = \sum_{k=0}^{p-1} f_{k+N} e^{-\frac{2\pi i}{N}(k+N) \cdot m} + \sum_{k=p}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} = \sum_{k=p}^{N+p-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m}$$

• 線型性がある:

$$\sum_{k=0}^{N-1} (\alpha f_k + \beta g_k) e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} + \beta \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-\frac{2\pi i}{N}k \cdot m}$$

• パーセバルの等式

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |F_m|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2$$

が成り立つ.

問題 21

DFT でパーセバルの等式が成り立つことを示せ.

解

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} (F_m^* \cdot G_m) &= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f_k^* e^{+\frac{2\pi i}{N}k \cdot m} \sum_{k'=0}^{N-1} g_{k'} e^{-\frac{2\pi i}{N}k' \cdot m} \right) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k,k'=0}^{N-1} f_k^* g_{k'} e^{\frac{2\pi i}{N}(k-k') \cdot m} = \sum_{k,k'=0}^{N-1} f_k^* g_{k'} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(k-k') \cdot m} \\ &= N \sum_{k,k'=0}^{N-1} f_k^* g_{k'} \delta_{kk'} = N \sum_{k=0}^{N-1} f_k^* g_k \end{aligned}$$

注) DFT の変換行列 (を $1/\sqrt{N}$ 倍して補正したもの) のユニタリー性 (転置共役が逆行列となる) だけからも言える. 実際,

$$\begin{aligned} \hat{F} = \hat{W}f &\rightarrow \begin{pmatrix} \hat{F}_0 \\ \vdots \\ \hat{F}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} w_{0,0} & \cdots & w_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N-1,0} & \cdots & w_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad w_{m,k} = e^{-\frac{2\pi i}{N}m \cdot k} = w_{k,m} \\ \hat{W}^{-1} = \bar{\hat{W}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \overline{w_{0,0}} & \cdots & \overline{w_{0,N-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{w_{N-1,0}} & \cdots & \overline{w_{N-1,N-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{w_{0,0}} & \cdots & \overline{w_{N-1,0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{w_{0,N-1}} & \cdots & \overline{w_{N-1,N-1}} \end{pmatrix} = \overline{\hat{W}}^t \end{aligned}$$

より \hat{W} はユニタリー行列である. このとき, 次の内積の計算により題意が証明される:

$$|\hat{F}|^2 = (\hat{F}, \hat{F}) = \overline{\hat{F}}^t \hat{F} = \overline{(\hat{W}f)}^t (\hat{W}f) = \overline{f}^t \overline{\hat{W}}^t \hat{W} f = \overline{f}^t f = (f, f) = |f|^2$$

- 離散的な「たたみ込み」

$$(f * g)_k \equiv \sum_{j=0}^{N-1} f_j g_{k-j} \quad (\text{ただし } g_{-j} = g_{N-j})$$

の DFT は、各関数の DFT の積である。

問題 22

$(f * g)_k$ の DFT を計算せよ。

解

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} (f * g)_k e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_j g_{k-j} e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_j g_{k-j} e^{-\frac{2\pi i}{N} (k-j+j) \cdot m} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\frac{2\pi i}{N} j \cdot m} \sum_{k'= -j}^{N-j-1} g_{k'} e^{-\frac{2\pi i}{N} k' \cdot m} = F_m G_m \end{aligned}$$

【DFT とフーリエ変換】

これまでは、DFT とフーリエ係数（フーリエ級数の展開係数）を対応させたが、DFT の定義式をフーリエ変換と対比することもできる。すなわち $f(t)$ の測定を時間 $0 \sim T$ にしたとき（これまでは、それ以外の部分に同じものを付け加えて周期関数としたが）ここではそれ以外の部分を 0 にする立場をとる。そうすると、フーリエ変換の積分区間も $0 \sim T$ に限定される。さらに、積分区間 $[0, T]$ を N 等分して ($dt \rightarrow \tau_s$)、フーリエ変換の積分をリーマン和で近似する：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{T=N\tau_s} f(t) e^{-i\omega t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-i\omega k\tau_s} \times \tau_s$$

DFT の定義 $\left(\frac{2\pi}{T}\right) = \Omega$

$$F_m \equiv \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-\left(\frac{2\pi i}{T}\right) m k\tau_s}$$

と比較すると

$$F_m \approx \frac{1}{\tau_s} F\left(m \frac{2\pi}{T}\right)$$

となる。

問 23

$f(t) = \begin{cases} 1 \cdots 0 \leq t < 0.1 \text{ s} \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$ という信号を 5 秒だけサンプリングした。サンプリングは 5 s 間を等間隔にして 1024 点、これをもとに DFT を得

た。 $f(t)$ の（本物の）フーリエ変換を積分計算で求め、それをもとに DFT の第 m 番目の成分の概略値を予測せよ。

答 23

$$N = 1024, \quad \tau_s = \frac{5\text{s}}{1024} \approx 5 \text{ ms}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{5\text{s}} = 0.4 \pi \text{ rad/s},$$

$$\Omega\tau_s = \frac{5\text{s}}{1024} \times \frac{2\pi}{5\text{s}} = \frac{2\pi}{1024} \text{ rad}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{0.1} e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} [e^{-i\omega t}]_0^{0.1} = \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega \times 0.1} - 1)$$

$$F_m \equiv \tilde{F}(m\Omega) \approx \frac{i}{m\Omega\tau_s} (e^{-im\Omega \times 0.1} - 1) + \frac{-i}{(N-m)\Omega\tau_s} (e^{i(N-m)\Omega \times 0.1} - 1)$$

Mathematica による試算 (mathematica 26 に集録) :

§ 4.5 FFT

DFT を定義のとおりに計算すると、サンプル数の増加にともない計算量が非常に増えて実用的でない。この問題を回避するアルゴリズムが 50 年ほど前に開発され、**高速フーリエ変換(FFT, Fast Fourier Transform)**として知られている。計算ソフトに実装されている DFT は FFT により計算している。

【高速離散フーリエ変換 (FFT) のアイデア】

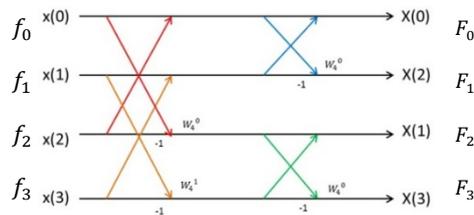
$$F_m = \tilde{F}(m\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} \rightarrow \begin{pmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{N} \times 0 \times 0} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N} \times 0 \times (N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\frac{2\pi i}{N} \times (N-1) \times 0} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N} \times (N-1) \times (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

N=4 の例

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 1} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 2} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 3} \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 2} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 4} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 6} \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 3} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 6} & e^{-\frac{2\pi i}{4} \times 9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \text{計算量} = N^2 \text{個のオーダーのかけ算.}$$

アイデアは

$$\begin{cases} F_0 = (f_0 + f_2) + (f_1 + f_3) \\ F_1 = (f_0 - f_2) - i(f_1 - f_3) \\ F_2 = (f_0 - f_2) - (f_1 + f_3) \\ F_3 = (f_0 - f_2) + i(f_1 - f_3) \end{cases}$$



$$\rightarrow \begin{cases} F_0^{(E)} = f_0 + f_2 \\ F_0^{(O)} = f_0 - f_2 \\ F_1^{(E)} = f_1 + f_3 \\ F_1^{(O)} = f_1 - f_3 \end{cases} : \left(\frac{N}{2}\right)^2 \text{個のオーダーのかけ算} \rightarrow \begin{cases} F_0 = F_0^{(E)} + F_1^{(E)} \\ F_1 = F_0^{(O)} - iF_1^{(O)} \\ F_2 = F_0^{(O)} - F_1^{(E)} \\ F_3 = F_0^{(O)} + F_1^{(O)} \end{cases} : \left(\frac{N}{2}\right)^2 \text{個のオーダーのかけ算}$$

合計、直接の計算にくらべ(1/2)倍の計算量

一般的に：データ数Nが偶数のとき $N = 2M$ とおくと

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} = \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j} e^{-\frac{2\pi i}{N} 2j \cdot m} + \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j+1} e^{-\frac{2\pi i}{N} (2j+1) \cdot m} = \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j} e^{-\frac{2\pi i}{M} j \cdot m} + e^{-i\frac{2\pi m}{N}} \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j+1} e^{-\frac{2\pi i}{M} j \cdot m} = F_m^{(E)} + e^{-i\frac{2\pi m}{N}} F_m^{(O)}$$

$m < M$ とすると

$$\begin{cases} F_m = F_m^{(E)} + e^{-i\frac{2\pi m}{N}} F_m^{(O)} \\ F_{m+M} = F_m^{(E)} - e^{-i\frac{2\pi m}{N}} F_m^{(O)} \end{cases}$$

すべての m について $F_m^{(E)}$ を求めるには $e^{-\frac{2\pi i}{M} j \cdot m}$ の $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ 個の行列要素とデータのかけ算、そして $e^{-i\frac{2\pi m}{N}} F_m^{(O)}$ を求めるには、 $e^{-\frac{2\pi i}{N} (2j+1) \cdot m}$ の $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ 個の行列要素とデータのかけ算が必要。さらに N 回の加減算で DFT が完成する。もしこのような分解をしなければ N^2 のかけ算が必要だから、計算回数

$$\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N}{N^2} \approx \frac{1}{2} \text{となる。データ数が 2 のべき乗のとき、この分解を続けることで計算量 } N \log_2 N \text{、したがって } N^2 \text{ との比としては } \frac{\log_2 N}{N} \text{ 倍程度}$$

($N=1024$ で $\sim 1/10$) に減少することが知られている。

FFT アルゴリズムについて参照できるサイトがたくさんある、たとえば：

<http://ja.wikipedia.org/wiki/高速フーリエ変換>

<http://laputa.cs.shinshu-u.ac.jp/~yizawa/InfSys1/basic/chap7/index.htm>

計算量については、http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/fftman/fft_note_s.pdf