

周期 T のフーリエ級数は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{T}$$

フーリエ係数 c_n は $f(t)$ を用いて

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{1\text{周期}} f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{T}$$

となる。

I. 周期 T で繰り返すパルス波形（パルス幅 Δ ，高さ1）

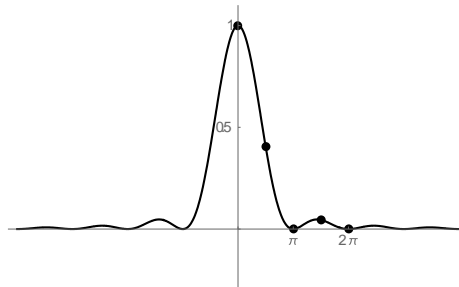
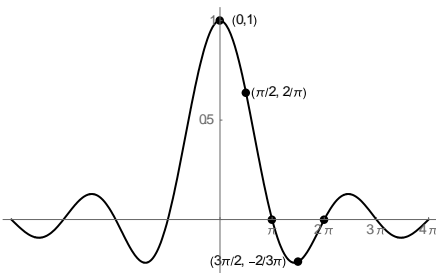
$$f(t) = \begin{cases} 1 \dots |t| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 \dots \text{その他} \end{cases}$$

について，以下の問に答えよ。

(1) フーリエ係数 c_n を $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ を用いて表せ（ Δ, T, ω_n を用いてできるだけ簡潔に）。

$c_n =$

$\text{sinc}(x)$ の区間 $[-4\pi, 4\pi]$ におけるグラフ（左），および $\{\text{sinc}(x)\}^2$ の区間 $[-2\pi, 2\pi]$ におけるグラフ（右）の概形を示す。関数値が0になる位置と極大・極小に注意せよ。



(2) $T = 1$ s, $\Delta = 0.2$ sの場合について $|c_n|^2$ （離散的なパワースペクトル）をグラフ（棒グラフ）に描くためのデータを集める。

(a) 直流成分 $|c_0|^2$ の値はどれだけか？

$|c_0|^2 =$

(b) $\text{sinc}(x)$ の引数 x の値が $x = \pi$ となるような n の値は何か？

また，その角周波数 ω_n は何 rad/s か？（数値に π を残す，たとえば " 2π rad/s"）

$n =$

$\omega_n =$

関数 $f(t)$ のフーリエ変換とその逆変換はそれぞれ

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

II. 大問Iのパルスの幅と高さはそのままにして、繰り返しの周期を無限大にした極限は、単発のパルスとみなせる。この波形

$$f(t) = \begin{cases} 1 \cdots |t| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

のフーリエ変換について、次の問に答えよ。

(1) sinc関数を用いて、 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ をできるだけ簡潔に示せ。

$$F(\omega) =$$

(2) フーリエ変換の $\omega = \omega_n$ における値 $F(\omega_n)$ を用いて、大問Iで求めたフーリエ係数 c_n を表せ。

$$c_n =$$

(3) $f(t)$ を $\Delta/2$ だけシフトした波形を

$$g(t) = f(t + \Delta/2) = \begin{cases} 1 \cdots 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

とする。

(a) $g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を $F(\omega)$ を用いて表せ。

$$G(\omega) =$$

(b) $g(t)$ を偶関数と奇関数の和として表す。すなわち

$$g(t) = g_{\text{even}}(t) + g_{\text{odd}}(t), \quad g_{\text{even}}(t) = \frac{1}{2}(g(t) + g(-t)), \quad g_{\text{odd}}(t) = \frac{1}{2}(g(t) - g(-t))$$

とする。このとき g_{even} および g_{odd} のフーリエ変換が $\text{Re}[G(\omega)]$ および $i \times \text{Im}[G(\omega)]$ と一致することを示せ。ヒント： $g(t)$ が実数値をとる($g(t) = \overline{g(t)}$)ことを用いて $g(-t)$ のフーリエ変換を $G(\omega)$ により表し、フーリエ変換の線形性を用いる。