周期関数はフーリエ級数で表すことができる．これは1811年にフーリエが熱伝導の問題を取り扱うときに発明した方法であり，それ以後，常微分方程式や偏微分方程式の初期値問題を解くときによく用いられるようになった．

音は空気の圧力変動が波として伝わる現象であり，ある基本周波数とその高調波に分解できる．この分解作業を調和解析という．逆に，ある基本振動数とその整数倍の振動数をもつ多くの単純な振動を適宜位相を調整して重ね合わせれば，任意の音色を作り出すことができる．

光についても同様である．光は電気と磁気の波である．光を周波数ごとに分解して光のスペクトルを得る．逆に各周波数を適切な位相と強度で重ねると必要な波形の光のパルスを合成できる．

時間軸上の現象だけでなく，空間座標を変数とした波形を論じることも多い．空間てきな周期のことを波長とい，単位長さの中に波が何個はいるかを波数という．時間軸上で，単位時間の中に波が何個入るか (何回振動するか) を振動数というのに対応する．

一般に，複雑な成分からなる対象を成分ごとに分解して表すことをスペクトル表示という．スペクトルに分解する作業が調和解析である．

調和解析の基礎がフーリエ級数である．これは周期的な変化をする対象にだけ適用可能であるが，フーリエ変換は非周期関数にも適用できる．以下の説明では，変数に x を用い基本区間の大きさを L と書くが，x を時間と読み，L を周期と読んでも同じである．

1　直交関数系

Q1

次の関数はすべて周期 2π をもつことを示せ．

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\cos nx,\ \sin nx,\cdots \tag{1}$$

Q2

次の関係が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx \tag{2}$$

Q3

(2) の第1項はすべての m,n について0となること，また第2項は $n\neq m$ なら0，$n=m$ なら π となることを示せ．

Q4

次の関係が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x\, dx \quad (3)$$

Q5

(3) は常に 0 であることを示せ.

Q6

次の関係が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\, dx \quad (4)$$

Q7

(4) の第 1 項は $m \neq n$ のとき 0, $m = n$ のとき π, また第 2 項は 0 であることを確認せよ.

関数の集合 $\{f_n(x)\}$ において

$$(f_n, f_m) \equiv \int_a^b f_n(x) f_m(x) dx \quad (5)$$

で内積を定義する. $n \neq m$ のとき内積が 0 となるなら, この集合に属する関数は直交関数系をなすという. また $n = m$ については

$$(f_n, f_n) \equiv \int_a^b f_n(x) f_n(x) dx \geq 0 \quad (6)$$

であり, $\|f_n\| \equiv \sqrt{(f_n, f_n)}$ を $f_n(x)$ のノルムという. 関数が連続であって恒等的に 0 でないなら, ノルムは 0 ではない. そこで

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x)}{\|f_n(x)\|} \quad (7)$$

をつくると

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 1 \cdots n = m \\ 0 \cdots n \neq m \end{cases} \quad (8)$$

となる. このとき は正規直交系をなすという.

(1) の関数系は，x の区間 $(-\pi, \pi)$ において直交系である

2 フーリエ級数とフーリエ係数

関数 $f(x)$ の周期が 2π で三角関数によって

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{9}$$

のように表されるとする.

Q8

上に述べた三角関数の直交性から下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \right) \\
&= 2\pi a_0 \\
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \right) \right] \cos mx dx \\
&= \pi a_m \\
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \right) \right] \sin mx dx \\
&= \pi b_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx
\end{aligned} \tag{10}$$

(9) をフーリエ級数といい，(10) をフーリエ係数という.

3　偶関数と奇関数

偶関数は

$$g(-x) = g(x) \tag{11}$$

である．このとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} g(x)\,dx \tag{12}$$

となる．

Q8

偶関数のフーリエ係数が次のように書けることを示せ．

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx \tag{13}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos nx\,dx \tag{14}$$

$$b_n = 0 \tag{15}$$

偶関数のフーリエ級数は

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{16}$$

のように表せる (フーリエ・コサイン級数)．

一方，奇関数は

$$h(x) = -h(-x) \tag{17}$$

であり

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,dx = 0 \tag{18}$$

となる．

Q9

奇関数のフーリエ係数が次のように書けることを示せ．

$$a_0 = 0 \tag{19}$$

$$a_n = 0 \tag{20}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\sin nx\,dx \tag{21}$$

奇関数のフーリエ級数は

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{22}$$

のように表せる (フーリエ・サイン級数).

Q10

区間 $(-\pi, \pi)$ で $|x|$ になる周期 2π の周期関数のフーリエ係数を求めよ.
解

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \cdots odd\, n \\ 0 & \cdots even\, n \end{cases} \tag{23}$$

$$N.B. \quad \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \tag{24}$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2} \tag{25}$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \tag{26}$$

4　複素フーリエ級数

サインとコサインは位相が 90 度異なる．時間軸の現象で言えば，任意の遅れを表すにはサインとコサインを適宜重みをつけて加算する必要がある．もし $\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$，　$\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$ の関係を用いると，一つの複素数 e^{iy} がサインとコサインの両方を含み，任意の時間遅れを表現する．

Q11

フーリエ級数を複素表示せよ.

解

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots \\ &\quad + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots \qquad (27) \\ &= a_0 + \frac{1}{2}(a_1 - b_1 i)e^{ix} + \frac{1}{2}(a_2 - b_2 i)e^{2ix} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(a_1 + b_1 i)e^{-ix} + \frac{1}{2}(a_2 + b_2 i)e^{-2ix} + \cdots \qquad (28) \end{aligned}$$

である．これを

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \qquad (29)$$

のように書き複素フーリエ級数という.

Q12

複素フーリエ係数を求めよ.

解

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (30)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (31)$$

より

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{inx} + e^{-inx})\,dx \qquad (32)$$

$$b_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{inx} - e^{-inx})\,dx \qquad (33)$$

となる．よって

$$a_n - b_n i = 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \qquad (34)$$

$$a_n + b_n i = 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{+inx}\,dx \qquad (35)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \qquad (36)$$

となる.

5　任意の周期への拡張

周期が L の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{L} + b_n\sin\frac{2\pi nx}{L}\right) \tag{37}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}\,dx \tag{38}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}\,dx \tag{39}$$

であり，複素表示で

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi nx/L}, \quad c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-i2\pi nx/L}\,dx \tag{40}$$

である．

Q13

区間 $(-L, L)$ で $f(x) = x^2$ のとき複素フーリエ級数に展開せよ．
解

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} x^2 e^{-in\frac{\pi}{L}x}dx = \frac{2L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n \tag{41}$$

$$\int x^2e^{-iax}dx = \frac{1}{-ia}x^2e^{-iax} - \frac{2}{-ia}\int xe^{-iax}dx$$

$$\int xe^{-iax}dx = \frac{1}{-ia}xe^{-iax} - \frac{1}{-ia}\int e^{-iax}dx$$

$$\int_{-L}^{L} x^2e^{-iax}dx = \left[\frac{1}{-ia}x^2e^{-iax} - \frac{2}{-a^2}xe^{-iax} + \frac{2}{ia^3}e^{-iax}\right]_{-L}^{L}$$

$$\left[\frac{1}{-ia}x^2e^{-iax}\right]_{-L}^{L} = \frac{1}{-ia}L^2e^{-iaL} - \frac{1}{-ia}L^2e^{+iaL}$$

$$= \frac{L^2}{ia}2i\left(\frac{e^{iaL}-e^{-iaL}}{2i}\right) = \frac{2L^3}{n\pi}\sin n\pi = 0$$

$$\left[\frac{2}{a^2}xe^{-iax}\right]_{-L}^{L} = \frac{2L}{a^2}2\left(\frac{e^{iaL}+e^{-iaL}}{2}\right) = \frac{4L^3}{(n\pi)^2}\cos n\pi$$

$$\left[\frac{2}{ia^3}e^{-iax}\right]_{-L}^{L} = 0 \tag{42}$$

6　不連続から連続へ

リーマン和の極限として定積分を書くと，$L \equiv b - a$ として

$$\int_a^b f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n \Delta x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n \frac{L}{N} \tag{43}$$

である．これは離散系と連続系の対応が

$$\frac{L}{N}\sum_{n=0}^{N} \to \int_a^b dx, \quad f_n = f(x_n) \to f(x) \tag{44}$$

であることを示している．関数の値を離散的にとりだし $\{f_n\}$ という数の組に注目し，これを「関数」の表現であるとすると，二つの「関数」f と g の線形和 $af_n + bg_n$ もまた「関数」である．離散系から連続系へ移っても事情は相似である．これが関数の集合を線形空間と考える所以である．また $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_n f_n \cdot g_n$ を内積と呼ぶ理由がここにある．

変換

$$F(k) = \int_a^b K(k,x)f(x)\,dx \tag{45}$$

は関数空間における線形変換であり，離散系の場合に $F_m = \sum_n K_{m,n} f_n$ が対応する．

フーリエ級数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \tag{46}$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(\xi)\, e^{-i\frac{2\pi}{L}n\xi}\, d\xi \tag{47}$$

において $L \to \infty$ の極限をとると

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i2\pi k(x-\xi)}\, d\xi dk \tag{48}$$

である．これを分解して

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i2\pi k\xi}\, d\xi \tag{49}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{i2\pi kx}\, dk \tag{50}$$

とし，f のフーリエ変換が F，F の逆フーリエ変換が f であるという．

Q14

(46) と (47) から (48) を導け.

解

(46) の中で $\frac{n}{L} \equiv k_n$ に注目する．n を 1 だけ変えたときの k_n の変化は $\frac{1}{L} \equiv \Delta k$ である．k_n は $(-\infty, +\infty)$ を動く離散変数であるが $L \to \infty$ により連続変数に移行する．(46) に (47) を代入し k_n と Δk で書き直すと

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(\xi)\, e^{-i\frac{2\pi}{L}n\xi}\, d\xi \right) e^{i\frac{2\pi n}{L}x} & (51)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-L/2}^{L/2} f(\xi)\, e^{-i2\pi k_n \xi}\, d\xi \right) e^{i2\pi k_n x} \Delta k & (52)
\end{aligned}
$$

である．$L \to \infty$ の極限をとると，$k_n \to k$ と $\sum_n \Delta k \to \int_{-\infty}^{+\infty} dk$ により

$$
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i2\pi\xi} d\xi \right) e^{i2\pi kx}\, dk \tag{53}
$$

を得る．内側の積分に対して最後の因子 $e^{i2\pi kx}$ は定数なので，これを内側に入れて

$$
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i2\pi k(x-\xi)}\, d\xi dk \tag{54}
$$

を得る.

以上の取り扱いは，しいて言えば基本区間 $(-L, L)$ が無限に広い場合である．すなわち，空間的な波なら最大の波長，時間的な波なら最大の周期が無限である．したがって，波の波数もしくは振動数は連続的に変化する．フーリエ変換により，周期関数でない一般の関数をスペクトル分解し，そこに含まれる基本的な波 ($e^{i2\pi kx}$ で表される波=波数が k の波) がどれほどの大きさと位相を持つかを解析したことになる.

積分核 $e^{i2\pi k(x-\xi)}$ から 2π をのぞき $e^{ik(x-\xi)}$ の形にすることが多い．これは積分変数 k および ξ(あるいは x) の尺度を変更したことになる．両方の尺度をともに $\sqrt{2\pi}$ ずつ変える流儀と，一方のみ変える流儀がある．いずれにしても，尺度を変更した後の変数を再び k，ξ などと書けば

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ik(x-\xi)}\, d\xi dk \tag{55}
$$

である.

(ディラックの) デルタ関数 $\delta(x-\xi)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i2\pi k(x-\xi)}\,d\xi dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi \end{aligned} \tag{56}$$

により導入される．$f(x)=1$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)\,d\xi = 1 \tag{57}$$

を満たす．(56) から分かるように，デルタ関数は $f(\xi)$ の値を指定した 1 点 x においてサンプリングする．すなわち，幅が無限に小さく，$\xi=x$ を除いていたるところで 0 となる．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k(x-\xi)}\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi kx}e^{-i2\pi k\xi}\,dk = \delta(x-\xi) \tag{58}$$

は，k が連続に変化することで生成される関数系 $\{e^{i2\pi kx}\}$ が正規直交であることを，デルタ関数を用いて示している．ただし，内積の定義は複素共役により $(f,g)\equiv\int f\cdot g^*\,dx$ とした．
デルタ関数は座標軸の尺度の変換にともない

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}dk \tag{59}$$

とも表示されるので注意すること．

7　例：弦の振動

弦を伝わる波 (微小振動) を解析する．振動の振幅 $y(t,x)$ は時間的にも空間的にも変動する．基礎方程式 (波動方程式) は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{60}$$

である．

Q15

$y(t,x) = y(x-vt)$ および $y(t,x) = y(x+vt)$ が波動方程式を満たすことを確かめよ．

参考

偏微分は，指定された変数以外を定数とみなして微分操作を行う．
$y(x-vt)$ とは，y を t と x の関数として表すと $(x-vt)$ という因子が現れ，しかも t と x はこれ以外の組み合わせでは現れないことをいう．それは，ある時刻 t,x にける振幅が $x=vt$ の速さで伝播していくことを意味する.「波とは形が崩れずに伝わるもの」といっている．同じ弦を波が逆に伝わることを表すのは $y(x+vt)$ なる解の存在である．両者が同時に可能であるとき，波動方程式が現れる．解を重ね合わせる (和をとる) ことで，波形が時間変化する波や，一箇所にとどまる波も表すことができる．

$z = x + vt$ とする．t についての偏微分においては $\Delta z = v\Delta t$ である．

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t, x) - y(t,x)}{\Delta t} \tag{61}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{y(z+\Delta z) - y(z)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta t} = v\frac{dy}{dz} \tag{62}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = v\frac{d}{dz} \tag{63}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{dy}{dz}\right) = v^2\frac{d^2 y}{dz^2} \tag{64}$$

同様に

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} \tag{65}$$

したがって波動方程式が成り立つ．

Q16

波動方程式の解が $y(t,x) = T(t)X(x)$ のように変数分離されるとき，T および X が従う方程式を求めよ．

$$\frac{\partial^2 TX}{\partial t^2} = X(x)\frac{d^2T}{dt^2} \tag{66}$$

$$= \quad v^2\frac{\partial^2 XT}{\partial x^2} = v^2T(t)\frac{d^2X}{dx^2} \tag{67}$$

$$\Rightarrow X(x)\frac{d^2T}{dt^2} = v^2T(t)\frac{d^2X}{dx^2} \tag{68}$$

両辺を TX で割ると

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} = v^2\frac{X''}{X} \equiv -\omega^2 \tag{69}$$

$$\omega : x \text{ にも } t \text{ にもよらない定数} \tag{70}$$

弦が $[0,L]$ の有限の長さ．初期条件としては静止状態すなわち

$$y(t=0,x) \quad = \quad f(x) \tag{71}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}_{t=0} \quad = \quad 0 \tag{72}$$

また境界条件としては弦の両端で固定，すなわち

$$y(t,0) = 0, \quad y(t,L) = 0 \tag{73}$$

を仮定する．

Q17

(69) を満たし，かつ両端の境界条件 (73) を満たす $X(x)$ はどのような形か．

$$X_n(x) = B_n \sin k_n x, \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{74}$$

この k_n により $\omega_n = vk_n$ と決まることに注意せよ．ω_n は固有振動数と呼ばれる．

両端を固定した弦の振動を一般的に表すとフーリエ級数により

$$y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \phi_n) \tag{75}$$

となる．初期条件 $y = f(x)$ と $y' = 0$ をフーリエ級数で表すと B_n と ϕ_n が係数の比較から決まる．

与えられた条件では

$$y(t=0,x) = \sum_{1}^{n} B_n \cdot \sin k_n x \cdot \sin \phi_n = f(x) \tag{76}$$

$$y'(t=0,x) = \sum_{1}^{n} \omega_n \cdot B_n \cdot \sin k_n x \cdot \cos \phi_n = 0 \tag{77}$$

である．第2式がxにかかわらず成立するには，すべてのnについて$\cos\phi_n = 0$であり，$\phi_n = \pi/2$．すると第1式は

$$y(t=0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x = f(x) \tag{78}$$

と書ける．

Q18

$f(x)$から係数B_nを与える積分の式を導出せよ．
解

B_nは$t=0$における変位のフーリエ・サイン係数である．区間$(0,L)$における波形を観察しているのだが，両端が固定されて振幅が0となる条件を導入したため，$(0,L)$の形状が半波長分となっていることに注意．もとは$(-L,L)$で定義された奇関数があり，その$x \geq 0$の部分である$f(x)$だけに注目したと考えればよい．B_nを求めるには (21) と (39) を見比べて

$$B_n = 2 \times \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{79}$$

となるので，この積分を実行すればよい．

上の例を弦の長さが半無限の場合に拡張する．初期条件は

$$y(t=0,x) = f(x), \quad 0 \leq x \tag{80}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \tag{81}$$

に変更し，境界条件は半無限を反映して片端のみ固定であるから

$$y(t,0) = 0, \quad 0 < t \tag{82}$$

に変更して初期条件をフーリエ変換し，与えられた初期条件の中に「どれだけ，どのような」波が含まれているかを分析する．

8　フーリエ・サイン変換

半無限の領域に利用できる道具としてフーリエ・コサイン変換とサイン変換を定義する．もしリーマン和による定積分の定義までもどるなら

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{83}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\times\frac{1}{L}\int_0^L f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}\,d\xi\right)\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{84}$$

を考えることができる (各自確認せよ).

複素フーリエ変換 (49),(50) から出発してもよい．(49) において関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$ かつ $x \geq 0$ で定義されているとき，$f(x)$ を奇関数すなわち $f(-x) = -f(x)$ であると仮定して $x < 0$ に拡張する．(49) は

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-i2\pi k\xi}\,d\xi \tag{85}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\left(\cos(-2\pi k\xi) + i\sin(-2\pi k\xi)\right)\,d\xi \tag{86}$$

であるが，$f(x)$ が実数値の奇関数であるから

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\left(i\sin(-2\pi k\xi)\right)\,d\xi \tag{87}$$

$$= -i\times 2\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin(2\pi k\xi)\,d\xi \tag{88}$$

$$= -i\times 2\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin(2\pi k\xi)\,d\xi \tag{89}$$

となる．F は純虚数の値をとる．$\hat{F} \equiv -[\mathrm{Im}F]$(すなわち $F = -i\hat{F}$) とすれば,

$$\hat{F}(k) = 2\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin(2\pi k\xi)\,d\xi \tag{90}$$

であり，これがフーリエ・サイン変換 (の原型) である．

$k \to -k$ とすれば

$$\hat{F}(-k) = 2\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin(-2\pi k\xi)\,d\xi \tag{91}$$

$$= -2\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin(2\pi k\xi)\,d\xi \tag{92}$$

$$= -\hat{F}(k) \tag{93}$$

なので $\hat{F}$ が実数値の奇関数となる．

逆変換 (50) は

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{2i\pi kx}\,dk \tag{94}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i\hat{F}(k)\right) i \sin(2\pi kx)\, dk \tag{95}$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \left(\hat{F}(k)\right) \sin(2\pi kx)\, dk \tag{96}$$

である．

積分変数を $x \to \sqrt{2\pi}x$, $k \to \sqrt{2\pi}k$ などと変更し，変数変換後の関数をあらためて $f(x)$，$\hat{F}(x) \to F(x)$ と書き直せば

フーリエ・サイン変換

$$F(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x) \sin(kx)\, dx \tag{97}$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(k) \sin(kx)\, dk \tag{98}$$

を得る．

対応する複素フーリエ変換は

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-kx}\, dx \tag{99}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{+kx}\, dk \tag{100}$$

である．

フーリエ・コサイン変換は $f(x)$ を偶関数と仮定して

$$F(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos(kx)\, dx \tag{101}$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(k) \cos(kx)\, dk \tag{102}$$

のようになる．

9　フーリエ変換の性質

$f(x) \to F(k)$ を「f の (複素) フーリエ変換が $F(k)$」と読むことにする．

線形性：

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \to \alpha F(k) + \beta G(k) \tag{103}$$

スケーリング：

$$f(ax) \to \frac{1}{|a|}F(\frac{k}{a}) \tag{104}$$

$$a > 0: \tag{105}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i2\pi kx}\,dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i2\pi\frac{k}{a}\xi}\,dx \tag{106}$$

$$= \frac{1}{a}F(\frac{k}{a}) \tag{107}$$

$$a < 0: \tag{108}$$

$$\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(\xi)e^{-i2\pi\frac{k}{a}\xi}\,dx = \frac{-1}{a}F(\frac{k}{a}) \tag{109}$$

シフト:

$$f(x-a) \to e^{-i2\pi ka}F(k) \tag{110}$$

$$\tag{111}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi kx}f(x-a)\,dx \tag{112}$$

$$= e^{-i2\pi ka}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi k(x-a)}f(x-a)\,dx \tag{113}$$

$$= e^{-i2\pi ka}F(k) \tag{114}$$

微分:

$$\frac{df}{dx} \to i2\pi k\,F(k) \tag{115}$$

$$\tag{116}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi kx}\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\,dx \tag{117}$$

$$= \lim_{dx\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{2i\pi kdx}-1}{dx}\right)\cdot F(k) \tag{118}$$

$$= i2\pi k\cdot F(k) \tag{119}$$

コンボルーション:

$$f * g \to F(k)G(k) \tag{120}$$

$$f * g \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi \tag{121}$$

$$\tag{122}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi kx} f * g\,dx \tag{123}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi kx}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi\right] dx \tag{124}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi kx}\left[g(x-\xi)\,dx\right] d\xi \tag{125}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i2\pi k\xi}G(k)\,d\xi \tag{126}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i2\pi k\xi}\,d\xi G(k) \tag{127}$$

$$= F(k)G(k) \tag{128}$$

10 DFT

コンピュータによるフーリエ変換では変換すべきアナログ波形をディジタル・サンプリングする．(レンズを使うと，光の空間分布から進行方向へ，アナログのままフーリエ変換することもできる．) ディジタル・サンプリングして得た離散的なデータをフーリエ変換する作業を離散的フーリエ変換 (DFT) という．

等間隔でサンプリングされた N 個のデータ

$$\{X(m)\} \equiv \{X(0), X(1), \ldots, X(N-1)\} \tag{129}$$

に対して，DFT を

$$Y(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{-i2\pi km/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{130}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)W^{km}, \quad W \equiv e^{-i2\pi/N} \tag{131}$$

で定義する．W を位相因子という．位相因子のべき乗は，それぞれ複素平面の単位円周を N 等分する点である．

位相因子の性質：

直交性

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} W^{km}W^{-lm} &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{-i2\pi km/N}e^{+i2\pi lm/N} && (132)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{-i2\pi(k-l)m/N} && (133)\\
&= \begin{cases} 1 \cdots l = k, \pm Nk, \pm 2Nk, \cdots \\ 0 \cdots otherwise \end{cases} && (134)
\end{aligned}
$$

周期性

$$
W^{km} = W^{(k+N)m} = W^{k(m+N)} \qquad (135)
$$

Q19

8 個のデータ $\{X(m)\} = 1, 3, 3, 2, -2, 1, 2, 1$ の DFT を実行せよ.
解:
位相因子は $W = e^{-i2\pi/8} = \cos(2\pi/8) - i\sin(2\pi/8) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$$Y(0) = \frac{1}{8}(1+3+3+2-2+1+2+1) = \frac{11}{8} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}
Y(1) = \frac{1}{8}\Bigg(&1+3\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)+3\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2+2\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3\\
&-2\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4+1\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^5+2\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6+1\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^7\Bigg)\\
&=\frac{1}{8}\left(1+3\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)+3\times(-i)+2\times\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\right.\\
&\left.-2\times(-1)+1\times\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)+2\times(i)+1\times\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right)\\
&=\frac{1}{8}\left(\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+1\right)\times i\right)\simeq\frac{1}{8}(3.71-3.12\times i)
\end{aligned} \tag{137}$$

$$\begin{aligned}
Y(2) = \frac{1}{8}\Bigg(&1+3\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2+3\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4+2\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6\\
&-2\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8+1\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{10}+2\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{12}+1\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{14}\Bigg)\\
&=\frac{1}{8}(1+3\times(-i))+3\times(-1)+2\times(i)\\
&-2\times(1)+1\times(-i)+2\times(-1)+1\times(i))\\
&=\frac{-6-i}{8}
\end{aligned} \tag{138}$$

$$Y(3) = \frac{1}{8}\left(\left(3-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\times i\right) \tag{139}$$

$$Y(4) = \frac{-3}{8} \tag{140}$$

$$Y(5) = \frac{1}{8}\left(\left(3-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\times i\right) \tag{141}$$

$$Y(6) = \frac{-6+i}{8} \tag{142}$$

$$Y(7) = \frac{1}{8}\left(\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+1\right)\times i\right) \tag{143}$$

Q20

位相因子の直交性から，逆 DFT

$$X(m)=\sum_{k=0}^{N-1}Y(k)W^{-km} \tag{144}$$

が成立することを確かめよ．

解：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N-1}Y(k)W^{-km}\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(n)W^{kn}\right]W^{-km}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X(0)W^{-km}+W(1)W^{k-km}+\cdots+X(m)W^{km-km}+\cdots\right]\\
&= \frac{1}{N}\cdot NX(m)
\end{aligned} \tag{145}$$

DFT ではサンプリングが有限の間隔で行われる．その間隔 (たとえば時系列データではその時間間隔) の逆数がデータから再構築される波形の最大周波数を決定する．本来のアナログ信号にさらに高い周波数成分が含まれているとき，ディジタルサンプリングしたデータは信号の質を劣化させてしまう．

また有限個の点でデータを構成するので，データの持続時間も有限となる．そのために低い周波数成分が取り込まれなくなる可能性がある．

それだけではなく，本来は持続している信号を，ある時刻にサンプリングし始め一定時間後にサンプリングを終了する．本来はなかった人為的な開始と終了という突然の強度変化を導入してしまう．これは「にせの高周波数成分」の導入となる．

11 FFT

DFT の計算を正直に行うと，データ数 N のとき N^2 回の積・和が現れる．データ数が大きくなると，この計算は実用的でなくなる．高速フーリエ変換 (FFT) は計算量が $N\log_2 N$ となるアルゴリズムである．

DFT の計算を再確認する：データ数が 8 の例．

$$Y(k)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X(m)W^{km},\quad W=e^{-i2\pi/N} \tag{146}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{8}\sum_{m=0}^{7} X(m)W^{km}, \quad W = e^{-i\pi/4} \tag{147}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} Y(0)\\ Y(1)\\ Y(2)\\ Y(3)\\ Y(4)\\ Y(5)\\ Y(6)\\ Y(7)\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7\\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14}\\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21}\\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28}\\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35}\\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42}\\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(0)\\ X(1)\\ X(2)\\ X(3)\\ X(4)\\ X(5)\\ X(6)\\ X(7)\end{pmatrix}$$

である．行列の要素は位相因子のべきを $W^8 = 1$ の周期性にもとづいて簡素化することができ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7\\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6\\ 1 & W^3 & W^6 & W & W^4 & W^7 & W^2 & W^5\\ 1 & W^4 & W & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4\\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W & W^6 & W^3\\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^2\\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1\end{pmatrix} \tag{148}$$

となり，さらに $W^2 = -i$ なので

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W & -i & -iW & -1 & -W & i & iW\\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -iW & i & W & -1 & iW & -i & -W\\ 1 & -1 & W & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -W & -i & iW & -1 & W & i & -iW\\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i\\ 1 & iW & i & W & -1 & -iW & -i & W\end{pmatrix} \tag{149}$$

となる ($W = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$)．この形を見ると同じ計算が繰り返し現れることがわかる．上手に計算すれば，前に計算した結果を利用でき計算回数を減らせることを示差している．

データ数が 2 のべき乗のときに適用できるアルゴリズムがある．まず (147) にもどり，添え字を 2 進数で表し，たとえば $X(5) = X(1,0,1)$ などとする．また，位相因子の指数も 2 進添え字により表し

$$8Y(k) = \sum_{m_0=0,1}\sum_{m_1=0,1}\sum_{m_2=0,1} X(m_2, m_1, m_0)W^{k\cdot(4m_2+2m_1+m_0)}$$

$$= \sum_{m_0=0,1} \sum_{m_1=0,1} \sum_{m_2=0,1} X(m_2, m_1, m_0) W^{4km_2} W^{2km_1} W^{km_0} \tag{150}$$

とする．k も二進表示:$k = 4k_2 + 2k_1 + k_0$ とすると

$$\begin{aligned}
W^{4km_2} &= W^{4(4k_2+2k_1+k_0)m_2} \\
&= W^{4\cdot4\cdot k_2\cdot m_2} W^{4\cdot2\cdot k_1\cdot m_2} W^{4\cdot k_0\cdot m_2} \\
&= (-1)^{4k_2m_2}(-1)^{2k_1m_2}(-1)^{k_0m_2} = (-1)^{k_0m_2} \qquad (151) \\
W^{2km_1} &= W^{2(4k_2+2k_1+k_0)m_1} = (-i)^{(2k_1+k_0)m_1} \qquad (152) \\
W^{km_0} &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{(4k_2+2k_1+k_0)m_0} \qquad (153)
\end{aligned}$$

以上の準備の下に (150) の和をとる作業を内側から順次実行する．

$$\begin{aligned}
X_1(k_0|m_1, m_0) &\equiv \sum_{m_2=0,1} X(m_2, m_1, m_0) W^{4km_2} \\
&= \sum_{m_2} X(m_2, m_1, m_0)(-1)^{k_0m_2} \qquad (154) \\
X_2(k_1, k_0|m_0) &\equiv \sum_{m_1} X_1(k_0|m_1, m_0)(-i)^{(2k_1+k_0)(m_1)} \qquad (155) \\
X_3(k_2, k_1, k_0) &\equiv \sum_{m_0} X_2(k_1, k_0|m_0) \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{(4k_2+2k_1+k_0)(m_0)} \qquad (156) \\
Y(k) &= \frac{1}{8} X_3 \qquad (157)
\end{aligned}$$

Q21

X_1 の定義を書き下せ．
解：

$$\begin{aligned}
X_1(k_0 = 0|m_1 = 0, m_0 = 0) &= X(000) + (1) \cdot X(100) \\
X_1(0|01) &= X(001) + (1) \cdot X(101) \\
X_1(0|10) &= X(010) + (1) \cdot X(110) \\
X_1(0|11) &= X(011) + (1) \cdot X(111) \\
X_1(1|00) &= X(000) + (-1) \cdot X(100) \\
X_1(1|01) &= X(001) + (-1) \cdot X(101) \\
X_1(1|10) &= X(010) + (-1) \cdot X(110) \\
X_1(1|11) &= X(011) + (-1) \cdot X(111)
\end{aligned}$$

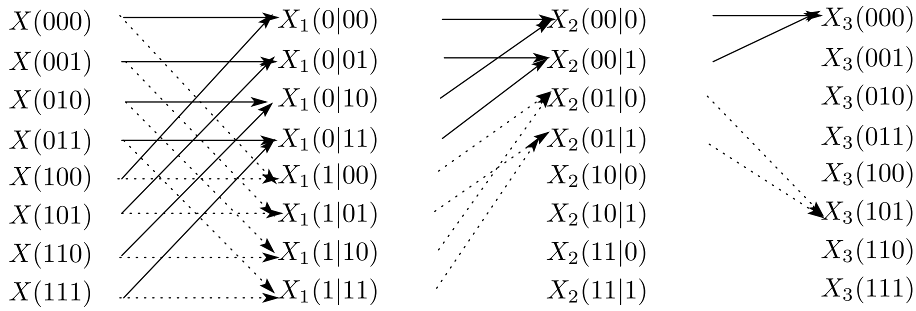
以下同様に,

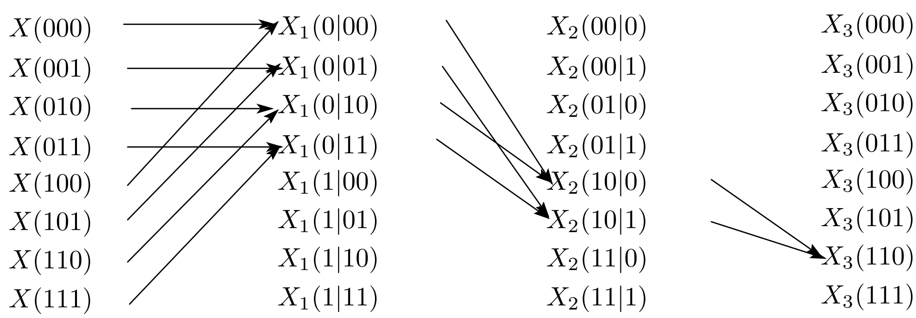
$$
\begin{aligned}
X_2(00|0) &= X_1(0|00) + (-i)^{2\cdot 0+0} X_1(0|10) = X_1(0|00) + X_1(0|10) \\
X_2(00|1) &= X_1(0|01) + (-i)^{2\cdot 0+0} X_1(0|11) = X_1(0|01) + X_1(0|11) \\
X_2(01|0) &= X_1(1|00) + (-i)^{2\cdot 0+1} X_1(1|10) = X_1(1|00) - iX_1(1|10) \\
X_2(01|1) &= X_1(1|01) + (-i)^{2\cdot 0+1} X_1(1|11) = X_1(1|01) - iX_1(1|11) \\
X_2(10|0) &= X_1(0|00) + (-i)^{2\cdot 1+0} X_1(0|10) = X_1(0|00) - X_1(0|10) \\
X_2(10|1) &= X_1(0|01) + (-i)^{2\cdot 1+0} X_1(0|11) = X_1(0|01) - X_1(0|11) \\
X_2(11|0) &= X_1(1|00) + (-i)^{2\cdot 1+1} X_1(1|10) = X_1(1|00) + iX_1(1|10) \\
X_2(11|1) &= X_1(1|01) + (-i)^{2\cdot 1+1} X_1(1|11) = X_1(1|01) + iX_1(1|11)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
X_3(000) &= X_2(00|0) + \left(e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)^{4\cdot 0+2\cdot 0+0} X_2(00|1) = X_2(00|0) + X_2(00|1) \\
X_3(001) &= X_2(01|0) + \left(e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)^{4\cdot 0+2\cdot 0+1} X_2(01|1) = X_2(01|0) + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) X_2(01|1) \\
X_3(010) &= X_2(10|0) + \left(e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)^{4\cdot 0+2\cdot 1+0} X_2(10|1) = X_2(10|0) - iX_2(10|1) \\
X_3(011) &= X_2(11|0) + \left(e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)^{4\cdot 0+2\cdot 1+1} X_2(11|1) = X_2(11|0) - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) X_2(11|1) \\
X_3(100) &= X_2(00|0) + \left(e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)^{4\cdot 1+2\cdot 0+0} X_2(00|1) = X_2(00|0) - X_2(00|1) \\
X_3(101) &= X_2(01|0) + \left(e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)^{4\cdot 1+2\cdot 0+1} X_2(01|1) = X_2(01|0) - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) X_2(01|1) \\
X_3(110) &= X_2(10|0) + \left(e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)^{4\cdot 1+2\cdot 1+0} X_2(10|1) = X_2(10|0) + iX_2(10|1) \\
X_3(111) &= X_2(11|0) + \left(e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)^{4\cdot 1+2\cdot 1+1} X_2(11|1) = X_2(11|0) + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) X_2(11|1)
\end{aligned}
$$

以上のプロセスをダイヤグラムによって表現する．最終段階の X_3 の一つに注目して，前段階がどの要素を用いたかを見ると





のようになる．ここで現れる交差パターンを「バタフライ」と呼んでいる．

最終の X_3 にはすべてのデータが寄与していることを確認せよ．

これが基本的な FFT のアルゴリズムだが改良型がある．

Q22

計算が $3 = \log_2 8$ 回で，各回に 8 個の積和が現れることを確認せよ．