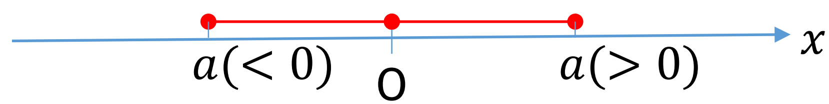
絶対値の性質

微分法の基礎と応用

絶対値記号

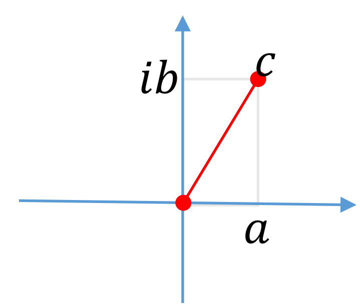
- 実数a:　数直線上で原点からの距離

$$|a| = \begin{cases} a \cdots a \geq 0 \\ -a \cdots a < 0 \end{cases}, \quad |a|^2 = a^2, |a| = \sqrt{a^2}$$



- 複素数$c = a + ib$:　複素平面上で原点からの距離

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)}$$
$$|c|^2 = c \times \bar{c}$$



絶対値の性質：

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |xy| = |x||y|$$

- 少なくとも1つが0のとき，0=0となり成立

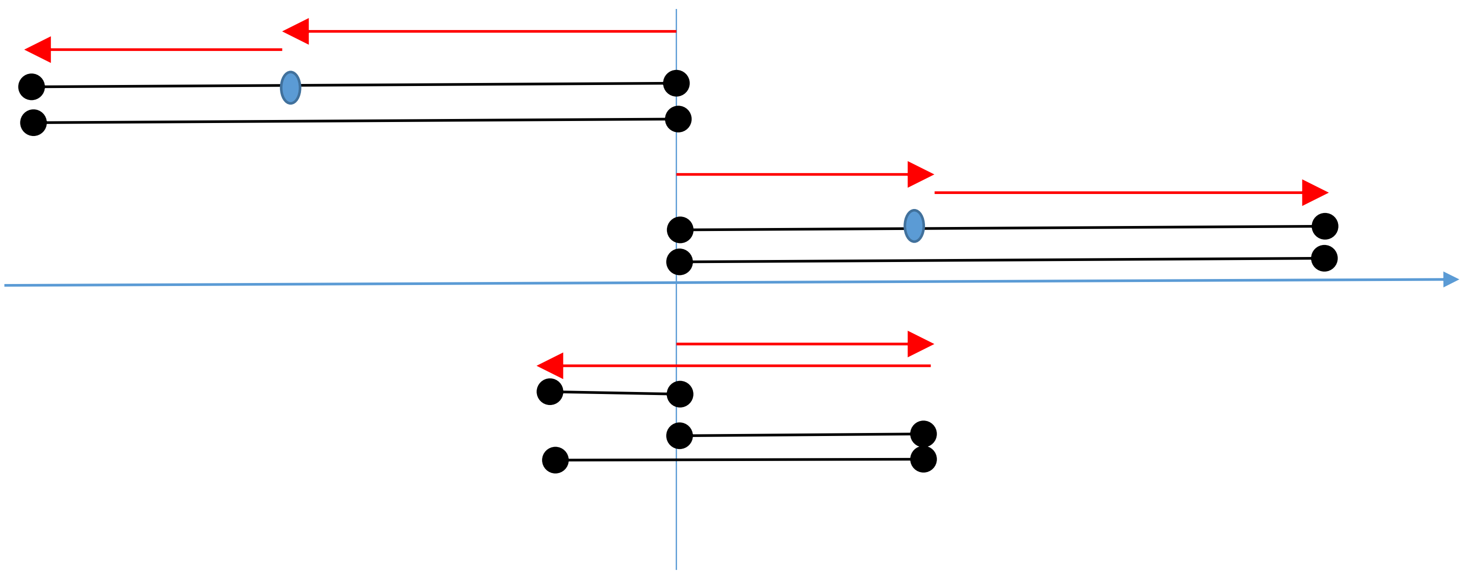
- xyが同符号のとき
  - $x > 0, y > 0 \rightarrow xy \geq 0$
    $$\Rightarrow |xy| = xy = |x||y|$$
  - $x < 0, y < 0 \rightarrow xy > 0$
    $$\Rightarrow |xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$$

- xyが異符号のとき，$x < 0 < y$とすれば十分
  - $xy < 0$
    $$\Rightarrow |xy| = -(xy) = (-x)y = |x||y|$$

絶対値の性質:

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x+y| \le |x| + |y|$

（任意の実数x, yについて$|x+y| \le |x| + |y|$）



$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x + y| \le |x| + |y|$

場合分けをして証明する

- 少なくとも一方が0のとき, $x = 0$とすると $|y| = |y|$となり成立

- xとyが同符号のとき
  - $x > 0, y > 0$
    $\Longrightarrow x + y > 0 \ \therefore |x + y| = x + y = |x| + |y|$
  - $x < 0, y < 0$
    $\Longrightarrow x + y < 0 \ \therefore |x + y| = -x - y = (-x) + (-y) = |x| + |y|$

- xとyが異符号のとき, $x < 0 < y$としても一般性を失わない
  - $|x| < y$
    $\Longrightarrow x + y > 0 \ \therefore |x + y| = x + y = -|x| + |y| < |x| + |y|$
  - $|x| > y$
    $\Longrightarrow x + y < 0 \ \therefore |x + y| = -x - y = |x| - |y| < |x| + |y|$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x+y| \le |x| + |y|$

絶対値記号を外すために2乗する

不等号の両辺が正⇒各辺の2乗の不等式を証明すればよい

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

証明すべき命題は，$\forall x, y \in \mathbb{R}, xy \le |x||y|$である.

- 少なくとも一方が0のとき，$xy = 0 = |x||y|$
- 同符号のとき
  - $x > 0, y > 0$
    $$\Rightarrow xy > 0 \therefore xy = |xy| = |x||y|$$
  - $x < 0, y < 0$
    $$\Rightarrow xy > 0 \therefore xy = |xy| = |x||y|$$
- 異符号のとき
  - $x < 0 < y$ として一般性を失わない
    $$\Rightarrow xy < 0 \therefore xy = -|xy| < |xy| = |x||y|$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq |x| + |y|$$

- $|x + y| \leq |x| + |y|$において$y \to -y$とすればよい

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \left||x| - |y|\right| \leq |x - y|$$

- 両辺を2乗すると

$$|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \leq x^2 + y^2 - 2xy$$

- $|x||y| \geq xy$と同等

$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| - |y| \leq |x| + |y|$

- 右辺は常に非負なので，$|x| \leq |y|$のとき左辺が負または0となるので自明
- $|x| > |y|$のとき，両辺がともに正だから，二乗したときの不等号を証明すればよい．
  - $(|x| - |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|$
  - $(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$
  - $-|x||y| \leq |x||y|$は絶対値の非負性から自明．