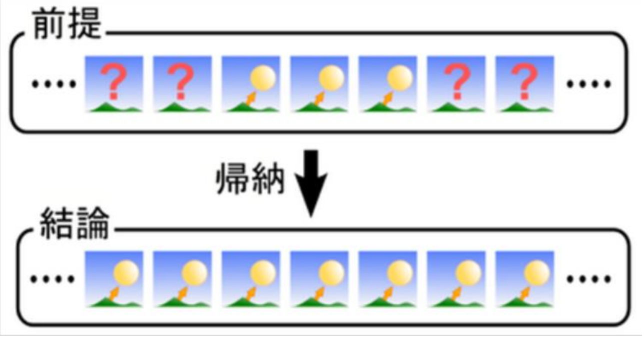
数学的帰納法

微分法の基礎と応用

用語：　「帰納」と「演繹」
http://ja.wikipedia.org/wiki/帰納

個別的・[特殊](#)的な事例から一般的・普遍的な[規則](#)・[法則](#)を見出そうとする[推論](#)方法のこと。

[対義語](#)は[演繹](#)。演繹においては前提が真であれば結論も[必然](#)的に真であるが、帰納においては前提が真であるからといって結論が真であることは保証されない.



「数学的帰納法」は「帰納法」ではなく，演繹である.

数学的帰納法

http://ja.wikipedia.org/wiki/数学的帰納法

- **数学的帰納法**は自然数に関する命題$P(n)$ が全てのn に対して成り立っている事を証明するための、次のような証明手法である[1]。
  1. $P(1)$ が成り立つ事を示す。
  2. 任意の自然数 k に対して、$P(k) \Rightarrow P(k+1)$ が成り立つ事を示す。
  3. 以上の議論から任意の自然数 n について $P(n)$ が成り立つ事を結論づける。
- 上で1.と2.から3.を結論づける所が数学的帰納法に当たる。

$$\forall n \geq 2, \forall h > 0, (1+h)^n > 1 + nh$$

- 観察:
  $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$
  $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 > 1 + 3h$

- 二項定理を使う方法

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} h^k$$

$$= 1 + nh + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} h^k}_{\text{正}}$$

$$\forall n \geq 2, \forall h > 0, \quad (1+h)^n > 1 + nh$$

数学的帰納法による証明

$P(2)$:

$$(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$$

$P(n) \rightarrow P(n+1)$:

$P(n)$すなわち$(1+h)^n > 1 + nh$　が成立するとき

両辺に正の数(1+h)を乗ずると

$$(1+h)^n(1+h) > (1+nh)(1+h)$$

左辺を(n+1)乗と書き，右辺を展開してまとめると

$$(1+h)^{n+1} > 1 + (n+1)h + nh^2 > 1 + (n+1)h$$

よって　$P(n+1)$が成り立つ．

したがって，

２以上のすべての自然数について命題が成り立つ．

フィボナッチ数列の一般項を数学的帰納法により証明する.

フィボナッチ数列とは

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

を満たすもの.

命題 P(n):フィボナッチ数列の第n項は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \qquad \alpha, \beta = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

で与えられる.

続：　手続き

- P(1)とP(2)が成り立つ
  - 一般項の式に$n = 1, 2$を代入し$a_1 = 1, a_2 = 2$を示す.

- P(k)とP(k+1)が成り立つなら，P(k+2)が成り立つ
  - $n = k, k + 1$とした一般項の２式を
  - 漸化式（フィボナッチ数列の定義）の右辺に代入し
  - $n = k + 2$の一般項の式となることを示す

続き：　計算

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \qquad \alpha, \beta = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right),$$

$$(t-\alpha)(t-\beta) = t^2 - t - 1 = 0, \quad t^2 = t + 1, \quad t = \alpha, \beta$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5}\right) = 1,$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 1 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$\begin{aligned} a_k + a_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^k - \beta^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^k(1+\alpha) - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^k(1+\beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^k(1+\alpha) - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^k(1+\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^k(\alpha^2) - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^k(\beta^2) \\ &= a_{k+2} \end{aligned}$$