なぜ 2 階導関数を$\frac{d^2f}{dx^2}$のように書くのか.

【1 階導関数を$\frac{df}{dx}$と書く理由】

変数が$x \to x + \Delta x$と変化したとしよう．Δxはxが増えた分（増分）で，あまり大きくないという印象はあるが，大きさは問わない（大きくてもかまわない)．この変数の変化にともなう関数$f(x)$の変化分（増分）は

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

である．

$f(x) = kx$すなわちグラフが直線のとき，傾き（変化の速さ）$\frac{\Delta f}{\Delta x}$は$\Delta x$の大きさによらず一定値$k$になる．$f(x)$のグラフが直線でなくても，グラフが滑らかならば，小さな範囲を拡大すると直線とみなせる．言い換えると「Δxを小さな範囲で動かす」なら，$\frac{\Delta f}{\Delta x}$は「$\Delta x$の大きさによらず」一定になる．どの程度小さい範囲ならよいかは，関数の具体的な形や直線とみなす許容範囲による．逆に，$\Delta x \to 0$の極限（$\Delta x \neq 0$）なら，間違えなく直線で近似できるだろう．関数を直線と見なせるほど小さなΔxをdxと書き「xの微分」という．このときの関数の変化もdfと書き「fの微分」という．

微分dfとdxは比例関係にある．これを

$$df = A\,dx$$

と書いたとき，比例係数Aを微分係数と呼ぶ．微分係数は

$$A = \frac{df}{dx}$$

となる．$A = f'(x)$と書くことも多い：$df = A\,dx = \frac{df}{dx}dx = f'(x)dx$.

様々な関数の微分係数を求める技法が微分法の根幹となる．

【関数の積，$u(x)v(x)$の微分】

$$df = d\{uv\} = u\,dv + v\,du$$

【微分係数の微分】

$dg = g'dx$において$g(x) = f'(x)$とすると

$$d\{f'\} = f''dx$$

【微分の微分】

$df = f'dx$の右辺を関数$f'(x)$と「関数」dxの積と考え

$$d\{df\} = d\{f'dx\} = d\{f'\}dx + f'd\{dx\} = f''dx \cdot dx + f'd\{dx\}$$

xの値により「関数」dxは変化しない（xの全域にわたり，比例関係が成り立つように小さくとった範囲であり，どのxについても同じ値である)．したがって，「定関数」dx微分は 0 である：$d\{dx\} = 0$.

以上まとめ，記号を簡略化していくと

$$d\{df\} = f''dx \cdot dx \ \to \ d\{df\} = f''dx \cdot dx \ \to \ d\,df = f''(dx)^2 \ \to \ d^2f = f''dx^2$$

こうして

$$f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$$

と書くことになった.