微分 df

減少・増加する割合いと微分

- $df = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$

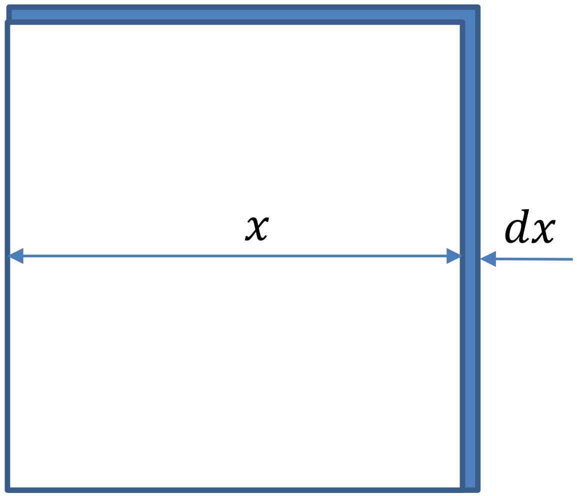
例：正方形の面積($S = x^2$)の増加

- $dS = d(x^2) = 2x\,dx$

  2次以上の微少量を切り捨て

  ✓$\frac{\Delta S}{S} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{x^2} = 2\frac{\Delta x}{x} + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$

  ✓$\frac{dS}{S} = 2\frac{dx}{x}$



- 1辺が1mの正方形の周囲を1%伸ばすと面積は何%広がるか，概算せよ.

例題

- ボール（真の球）の体積が0.3%増加するとき半径はどれだけ増加するか.

答

球の体積: $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

$$\frac{dV}{dR} = 4\pi R^2 = 3\frac{V}{R}$$

体積の変化率と半径の変化率:

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R}$$

$\therefore$

$$\frac{dV}{V} \simeq 0.3\% \rightarrow \frac{dR}{R} \simeq 0.1\%$$

例題

- 長方形の各辺を測って面積を求めるとき，測定値の相対的な不確定さが縦1%，横2%であった．計算で得られる面積の相対的な不確定さはどれだけか．

答

各辺の不確定さ:

$$(a-\Delta x)<x<(a+\Delta x), \qquad (b-\Delta y)<y<(b+\Delta y)$$

相対誤差:

$$\frac{\Delta x}{a}=1\% \frac{\Delta y}{b}=2\%$$

面積の不確定さ:

$$(a-\Delta x)(b-\Delta y)<S<(a+\Delta x)(b+\Delta y)$$

$$ab-\Delta S_1<S<ab+\Delta S_2$$

「微分」で線型化:

$$\Delta S_1=\Delta S_2 \simeq a\Delta y+b\Delta x$$

面積の相対誤差:

$$\frac{\Delta S_1}{S}=\frac{\Delta S_2}{S}\simeq\frac{\Delta y}{b}+\frac{\Delta x}{a}$$

面積の相対誤差は$\mathbf{3}\%(=\mathbf{1}\%+\mathbf{2}\%)$

例題

ランナーの速さを巻き尺とストップウォッチで測定したとき，距離の測定の相対誤差が1%, 時間の測定誤差1%であった．速さの計算値の相対誤差はどれだけか.

答

測定誤差: $\ell \pm \Delta\ell, \quad t \pm \Delta t$

速度: $v = \frac{\ell}{t}, \quad \frac{\ell - \Delta\ell}{t + \Delta t} < v < \frac{\ell + \Delta\ell}{t - \Delta t}$

相対誤差: $\frac{1 - \frac{\Delta\ell}{\ell}}{1 + \frac{\Delta t}{t}} < \frac{v}{(\ell/t)} < \frac{1 + \frac{\Delta\ell}{\ell}}{1 - \frac{\Delta t}{t}}$

1次近似: $(1 + x)^a \simeq 1 + ax$

$$\left(1 - \frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{t}\right) < \frac{v}{(\ell/t)} < \left(1 + \frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)$$

1次近似: $\frac{\Delta\ell}{\ell} \times \frac{\Delta t}{t} \simeq 0$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{\Delta t}{t}$$

1%+1%=2%

「微分」の計算

$$f(x) \quad \to \quad df = f'(x)dx$$

例

$$d(\sin x) = \cos x \ \ dx$$

$$x = \frac{\pi}{3}\text{の近くで}\Delta x = 0.1 \to \Delta \sin x \simeq \frac{1}{2} \times 0.1$$

$$d(\log x) = \frac{dx}{x}$$

$$x = e\text{の近くで}\Delta x = 0.1 \to \Delta \log x \simeq \frac{1}{e} \times 0.1$$

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$$

$$x = 2\text{の近くで}\Delta x = 0.1 \to \Delta \frac{1}{x} \simeq \frac{-1}{4} \times 0.1$$

陰関数微分

- 陽関数と陰関数：

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ と } g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

- 陰関数微分
  - 陽関数に直さず微分を求める
  - グラフ上の２点：　$g(x, y) = 0,\quad g(x + dx, y + dy) = 0$
  - $dg = g(x + dx, y + dy) - g(x, y) = 0$
  - 例
  - $\{(x + dx)^2 + (y + dy)^2\} - \{x^2 + y^2\} = 2xdx + 2ydy + \underbrace{dx^2 + dy^2}_{\text{高次の微分}} = 0$

$$2xdx + 2ydy = 0$$

$$dy = -\frac{x}{y}dx = -\frac{x}{\pm\sqrt{1 - x^2}}dx, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\pm\sqrt{1 - x^2}}$$