マクローリン展開
による関数の近似

e^x

- $e^x \simeq$ $\boxed{}$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x^2					
$x^2/\boxed{}$					
x^3					
$x^3/\boxed{}$					
$e^x \simeq$					
$e^x =$	1.105…	1.221…	1.350…	1.492…	1.649…

$\sin x$

- $\sin x \simeq \boxed{\quad\quad}$

x(度)	10	20	30	40	50
x(rad)	0.175…	0.349…	0.524…	0.698…	0.873…
x^3	0.0053	0.043	0.144	0.34	0.665
$x^3/\boxed{\quad}$					
$\sin x \simeq$					
$\sin x =$	0.174…	0.342…	0.5	0.643…	0.766…

$x \to 0$ の極限

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

  ✓ $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$

  ✓ $\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{\left\{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right\} - x}{x^3} = \frac{-\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots}{x^3}$

  $$= -\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 \cdots \to -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

- ロピタル
  - $\lim_{x \to a} f(x) = 0$(または∞)かつ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ (または∞)

    のとき，$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

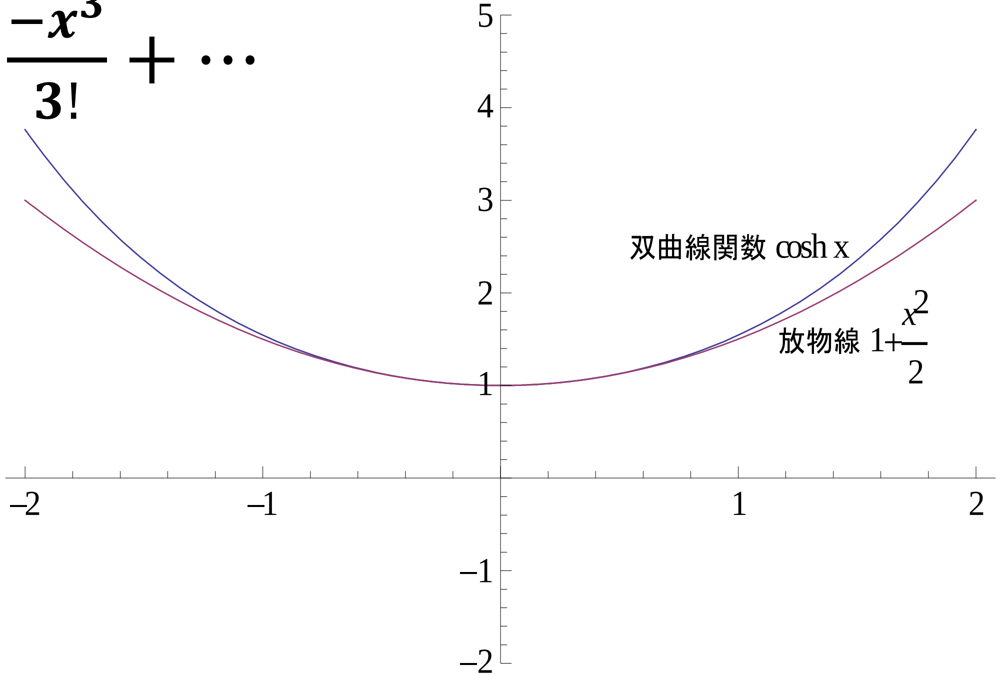
$\cosh x$ のグラフ

- $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

✓$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

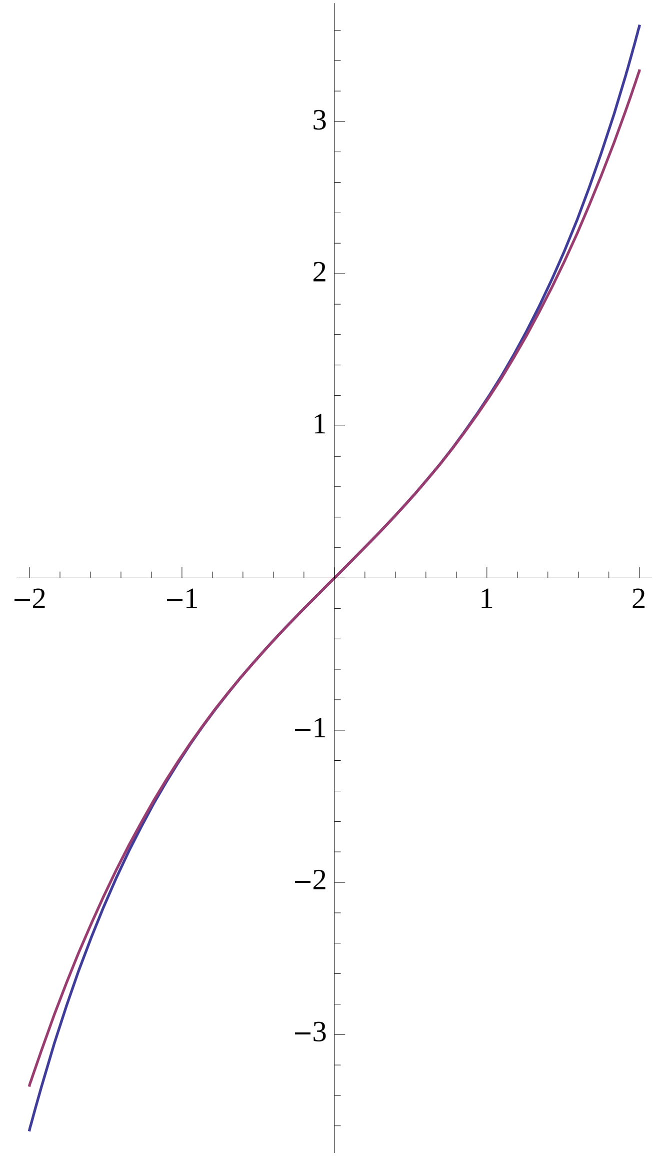
✓$e^{-x} = 1 + \dfrac{-x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{-x^3}{3!} + \cdots$

✓$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$



$\sinh x$ のグラフ

- $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
  - ✓$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
  - ✓$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$
  - ✓$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + \cdots$



$\sqrt[5]{33}$の近似値

- $\sqrt[5]{33} = 2 \times \sqrt[5]{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}} = 2 \times \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}}$

  ✓ $(\mathbf{1} + \boldsymbol{x})^{\frac{1}{5}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R_2}$, $\quad \boldsymbol{R_2} = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}(\mathbf{1} + \mathbf{c})^{\frac{-9}{5}}\boldsymbol{x}^2$, $(\mathbf{0} < \mathbf{c} < \boldsymbol{x})$

  ✓ $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}\right)^{\frac{1}{5}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}} + \boldsymbol{R_2}$, $\quad \boldsymbol{R_2} = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}(\mathbf{1} + \mathbf{c})^{\frac{-9}{5}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}\right)^2$, $\left(\mathbf{0} < \mathbf{c} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}\right)$

  ✓ $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}\right)^{\frac{1}{5}} \simeq \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{160}} = \mathbf{1.00625}$

  ✓ $\boldsymbol{R_2} < 0$, $\quad |\boldsymbol{R_2}| = \left|\frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{12800}}(\mathbf{1} + \mathbf{c})^{\frac{-9}{5}}\right| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12800}} \simeq \mathbf{0.00008}$

  ✓ $\mathbf{1.00625} - |\boldsymbol{R_2}| < \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}\right)^{\frac{1}{5}} < \mathbf{1.00625}$

  ✓ $\mathbf{1.00617} < \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}\right)^{\frac{1}{5}} < \mathbf{1.00625} \to \mathbf{2.01234} < \mathbf{33}^{\frac{1}{5}} < \mathbf{2.01250}$

測定値の誤差とは違う

- $\mathbf{1.00617 < \left(1 + \frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} < 1.00625}$
  - 上限と下限の平均値 = 1.006 21
  - 不確定さの幅　(片側) = 0.000 04（よりも少しだけ大きい）

✓ $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}\right)^{\frac{1}{5}} = \mathbf{1.006\ 21} \pm \mathbf{0.000\ 04}$:　誤差が$\mathbf{4} \times \mathbf{10}^{-5}$程度

と書くと，測定値が1.006 21を中心に分布する意味となる

- **参考：相対誤差**

✓ $\frac{\text{測定誤差}}{\text{真の値（平均値）}} = \frac{\mathbf{0.00004}}{\mathbf{1.00621}} \simeq \mathbf{4} \times \mathbf{10}^{-5}$

マクローリン展開による近似値の計算と誤差のみつもり

- 希望：展開の次数を下げる．既知の関数値を使う
  ⇒展開の中心を選ぶ

- 許容される誤差（必要な精度）から
  ⇒剰余項の大きさ　⇒展開の次数

- 注意：
  - 剰余項の上限？

e^{-x}

- $$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + R_{n+1},$$
$$R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}e^{-c}}{(n+1)!}x^{n+1}$$
- $$|R_{n+1}| = \frac{e^{-c}}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!}, \quad |R_{7+1}| < \frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} \simeq 2 \times 10^{-5}$$

✓ $$\frac{1}{e} = e^{-1} \simeq 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$$
$$= \frac{2119}{5760} \simeq 0.367\,882\,\ldots$$

✓ $|R_{8+1}| < \frac{1}{9!} =$ 8.2672 × 10^{-6}

- $0.367882 - \frac{1}{9!} = \mathbf{0.367\,874} < \frac{1}{e} < \mathbf{0.367\,882}$; **cf:** $\frac{1}{e}$=0.367 879 44...

$e = 2.718\ 281\ 8\ldots$

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$
  - ✓ $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8!} + \frac{e^c}{9!} \cdot 1$
  - ✓ $1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8!} = \frac{109601}{40320} \simeq 2.718\ 278\ 8\ldots$
  - ✓ $\frac{e^c}{9!} \cdot 1 < \frac{e}{9!} = \frac{e \longleftarrow ?}{362880} < \frac{3}{362880} \simeq 8.3 \times 10^{-6}$
- $2.718\ 278\ 8 < e < 2.718\ 278\ 8 + 8.3 \times 10^{-6} = 2.718\ 287\ 1$
- $\mathbf{0.367\ 874} < \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}} < \mathbf{0.367\ 882}$

  $\rightarrow 2.718\ 263 < e < 2.718\ 322$

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$$

- $\frac{1+x}{1-x} = y \to x = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$

  $-\ y > 1 \rightleftharpoons 0 < x < 1$

- $\mathbf{log(1+x) - lo\,g(1-x)}$

$$= \left\{ \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{3}} - \frac{\boldsymbol{x}^4}{\mathbf{4}} \cdots \right\} - \left\{ -\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{3}} - \frac{\boldsymbol{x}^4}{\mathbf{4}} \cdots \right\}$$

$$= \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{x}^3 + \cdots$$

マクローリン展開(べき級数)

- $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
  - $a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{1}{2!} f''(0), \cdots a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$
- 収束に必要な条件
  - 無限に加える: $a_n x^n > a_{n+1} x^{n+1},\ \lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0$
- 収束する場合
  - 剰余項が0に収束する
  - 交代級数
  - 収束する等比級数より小さい
    - 公比=$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1$