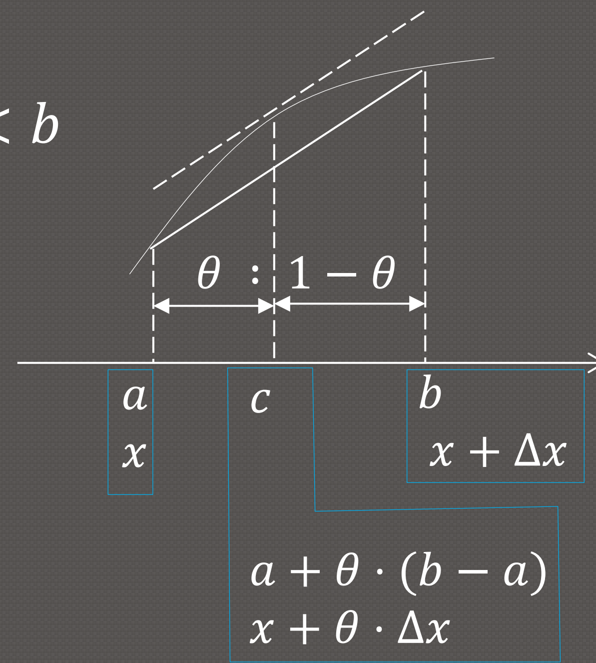
テーラー展開

平均値の定理
関数の1次近似
テーラー展開
剰余項と誤差

平均値の定理

- 滑らかな関数では，2点間の「平均の傾き」と 等しい傾きをもつ 接線が 2点の間に 必ずある．
  - $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b$
  - $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$



- 増分の式と比較：

$$f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$$
$$= f'(c)\Delta x, \qquad x < c < x+\Delta x$$

- cのかわりに　$0<\theta<1$ として

$$a < a+\theta\cdot(b-a) < b$$
$$x < x+\theta\Delta x < x+\Delta x$$

平均値の定理

$y = f(x) = x^2$：xの区間[1,2]に平均値の定理を適用したとき，前スライドのθの値は？

区間の両端の点：$(1,1),(3,9)$ →傾き=$\frac{9-1}{3-1} = 4$

$$\text{平均値の定理}：f(3) - f(1) = f'(c)(3-1)$$

$$f'(c) = 2c = 4 \quad \therefore c = 2,\ 1 < c < 3$$

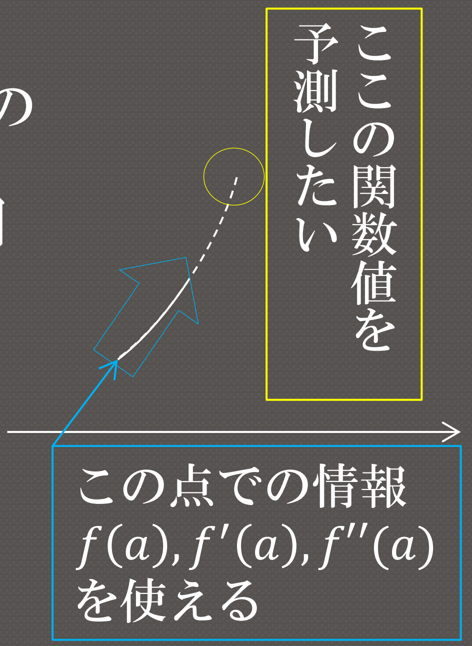
$$a = 1, b - a = 3 - 1 = 2$$

$$c = a + \theta \cdot (b - a) \therefore \theta = \frac{c-a}{b-a} = \frac{2-1}{2} = 0.5$$

平均値の定理

$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$

- 新しい視点
  - 微分係数は（差が無限小とはいえ）離れた2点の関係を表す．
  - １点の微分係数を用いると，少し離れた点の関数値について何が言えるだろう？
- **平均値の定理:** $f(b) \simeq f(a)$と読む
  - **$\boldsymbol{a}$ での情報$\boldsymbol{f(a)}$を用いて$\boldsymbol{f(b)}$を表す式である**
  - $f'(c)(b-a)$は$\simeq$を$=$にするための「ゴミ処理」
- さらに進んで
  - **$\boldsymbol{a}$での情報**$f(a), f'(a)$を用いて，$f(\boldsymbol{b})$**を表す**にはどうすればよい？



平均値の定理

$f'(x)$についての平均値の定理

$$f'(b) = f'(a) + f''(c)(b - a)、a < c < b$$

bをxと書き変数とする：

$$f'(x) = f'(a) + f''(c)(x - a)、a < c < x$$

上式は

$$f(x) = \cdots + f'(a)x + \cdots$$

をxで微分して得られたという．式を完成させよ．注意：$x = a$ で等号が成立するように．

平均値の定理

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$$

$f(x) = x^3, a = 1, x = 3$とすると$c = ?$

$$f(3) = 27, f(1) = 1, f'(1) = 3, f''(c) = 6c$$

$$27 = 1 + 3(3-1) + \frac{1}{2}6c(3-1)^2 = 1 + 6 + 12c$$

$$c = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

平均値の定理

n階微分係数$f^{(n)}(x)$に平均値の定理を用いた

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a) + f^{(n+1)}(c)(x-a)$$

は

$$f(x) = f(a) + \cdots$$

をn回微分して得られるという．式を完成せよ．

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(x)(x-a)^2$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

テーラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(x)(x-a)^2$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

関数$f(x)$を，区間左端の情報で多項式に展開したもの

$$f(x) = \sum_{k=0,n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ ：剰余項

$f(x)$のn次多項式による近似：

$$f(x) \simeq \sum_{k=0,n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x-a)^k$$

近似の誤差（真の値との差）は$|R_{n+1}|$で見積もる

テーラー展開

$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n+\cdots$ とする．
$f(0)=A_0$である．他の係数も両辺を微分して同様に求め，
テーラー展開（$a=0$，マクローリン展開という）と比較せよ．

$$f'(x)=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\cdots+nA_nx^{n-1}+\cdots$$
$$\rightarrow f'(0)=A_1$$
$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\,A_n+(n+1)n\,(n-1)\cdots 2\,A_{n+1}x+\cdots$$
$$\rightarrow f^{(n)}(0)=n!\,A_n$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$$

x軸方向にaだけ平行移動すると

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\cdots$$

テーラー展開

- テーラー展開する(動詞), テーラー展開を求める(名詞)
- $x = a$のまわりの展開：$f(x) = f(a) + f'(a)x + \cdots$
- マクローリン展開：$x = 0$のまわりのテーラー展開
- 展開の次数 n：

$$f(x) = \sum_{k=0,n} \frac{1}{k!} f^{(k)} (x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

  展開をn次で打ち切るときの剰余項：$R_{n+1}(x)$
- テーラー級数(a=0 → べき級数ともいう)：

$$f(x) = \sum_{k=0,\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)} (x-a)^k$$

テーラー展開

$\frac{de^x}{dx} = e^x$という性質を用いてe^xのマクローリン展開($x = 0$のまわりのテーラー展開)を求めよ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, \qquad 0 < c < x$$

テーラー展開

$e^{-x} \simeq 1 - x$という近似の，$x = 0.1$における誤差を見積もれ.

$$e^{-x} = 1 - x + R_2(x), \qquad R_2(x) = \frac{e^{-c}}{2}x^2, 0 < c < 0.1$$

$$誤差 = |R_2(0.1)| < \frac{e^0}{2}(0.1)^2 = \frac{1}{200} = \frac{5}{1000}$$

$$\because e^{-c} < e^0 = 1$$

$(e^{-0.1} = 0.90483 \ldots \text{vs } 1 - (0.1) = 0.9 \quad 誤差=\frac{4.83\ldots}{1000})$

テーラー展開

等比級数の収束条件から

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

のように，等号が成立する範囲を定めよ．

$$|x| < 1$$