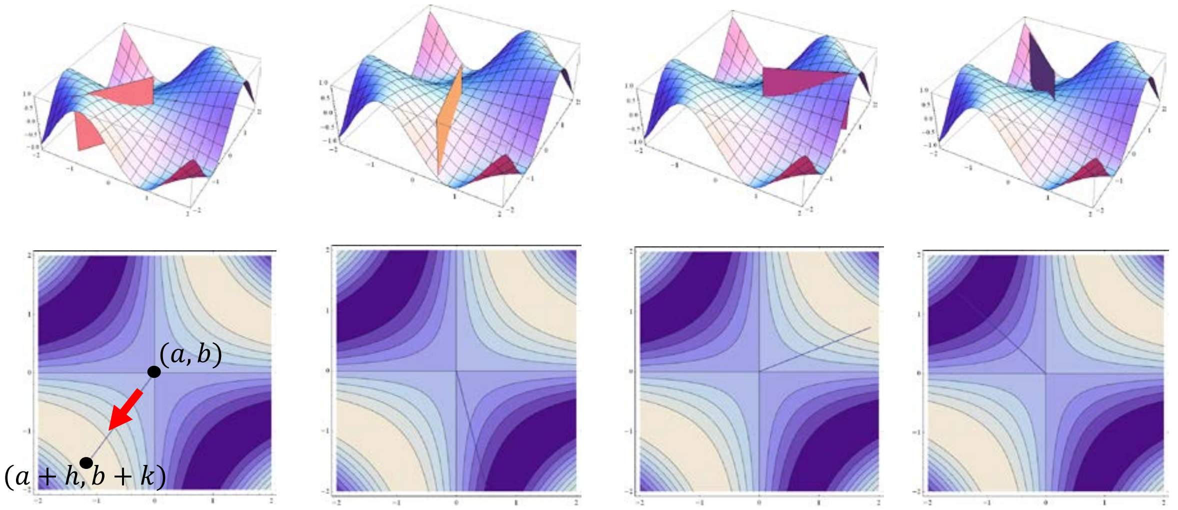
１変数関数のテーラー展開・マクローリン展開が関数の性質を多項式で表し関数値を簡便に計算するのに有効であることを学んだ．同様に関数$f(x,y)$を各変数の多項式で（少なくとも近似的に）表すことができたら便利だろう．

(1) 方針

$z=f(x,y)$の「点(a,b)の付近の性質」を調べるため，(a,b)からある決まった方向に移動して関数値の変化を観察する．移動の方向を全方位（360 度）にわたり変えて，同様の観察をする．イメージ図：



(2) 直線上の移動の表現：

点(a,b)から$(a+h,b+k)$まで移動する．hとkが移動の向きを決めるパラメータとなる．移動距離を表すパラメータとして$t(0\le t\le 1)$を用いると，移動中の点の座標$(x(t),y(t))$は

$$x(t)=a+ht,\quad y(t)=b+kt$$

となる．

ある方向(h,k)の移動について，

$$F(t)=f(x(t),y(t))$$

は，移動中に関数値がどう変化するかを表す．$F(0)$は点(a,b)における関数値$f(0,0)$，$F(1)$は$f(a+h,b+k)$を与え，一般のtではその中間の点における関数値が与えられる．

(3) １変数関数$F(t)$に対する平均値の定理:

Fがtの区間$(0,1)$で微分可能ならば $$F(t)=F(0)+F'(\theta)\times t,\ \ ただし F'(t)=\frac{dF}{dt}$$ となる$0<\theta<1$が存在する

(4) (3)をfを用いて表す：

$$F(t)=f(a+ht,b+kt),\qquad F(0)=f(a,b)$$

だから，あとは$F'(\theta)$だけ書き換えればよい

$$dF=f_x dx+f_y dy \quad\rightarrow\quad F'(t)=\frac{dF}{dt}=f_x\frac{dx}{dt}+f_y\frac{dy}{dt}=f_x(a+ht,b+kt)\times h+f_y(a+ht,b+kt)\times k$$

したがって

$$f(a+ht,b+kt)=\ f(a,b)+f_x(a+h\theta,b+k\theta)\times ht+f_y(a+h\theta,b+k\theta)\times kt$$

となるθが存在する．$t=1$とおくと

２変数関数の平均値の定理：

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a+h\theta,b+k\theta)\times h+f_y(a+h\theta,b+k\theta)\times k,\quad 0<\theta<1$$

を得る．言葉で表すと，関数$f(x,y)$の，点(a,b)から$(a+h,b+k)$までの平均の傾きと接線の傾きとが等しくなる位置が必ずこの２点間のどこかにある．なお

$$f_x(a+h\theta,b+k\theta)\times h+f_y(a+h\theta,b+k\theta)\times k$$

は，点$(a+h\theta,b+k\theta)$における(h,k)方向の接平面の傾きに等しい．

(5) テーラー展開

$$F(t)=F(0)+F'(0)\times t+\frac{1}{2}F''(0)\times t^2+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)\times t^n+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta)\times t^{n+1},\ \ 0\ <^{\exists}\ \theta<1$$

$$F(0)=f(a,b),$$

$$F'(0)=f_x(a,b)\times h+f_y(a,b)\times k=\left[h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(a.b)}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\,\Big|_{(a,b)}$$

というところまでは，すでに行った計算から直ちにわかる．

(6＊)∇演算子

上式の最後の辺は「fに$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)$という演算を作用させ，得られた式の$x$と$y$に$a$と$b$を代入する」という意味で書いた．$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)f$のように表すとき，$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$をナブラ演算子という：スカラー関数に作用してその最大傾斜を表すベクトルを生成する演算子である．$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)=(h,k)\cdot\nabla$と内積で表せる．

(6) $F''(t)$について：

$$\frac{dF}{dt}=f_x\frac{dx}{dt}+f_y\frac{dy}{dt}=h\,f_x\big(x(t),y(t)\big)+k\,f_y(x(t),y(t))$$

を再度tで微分する．

$$F''(t)=\frac{dF'}{dt}=\frac{d}{dt}\Big[h\,f_x\big(x(t),y(t)\big)+k\,f_y\big(x(t),y(t)\big)\Big]=h\frac{d}{dt}\Big[f_x\big(x(t),y(t)\big)\Big]+k\frac{d}{dt}\Big[f_y\big(x(t),y(t)\big)\Big]$$

右辺の各項は偏導関数の微分だが，偏導関数とはいえ２変数関数が合成関数として t だけの関数になってしまったものだから，$f(x(t),y(t))$の微分係数を求めたのと全く同様に

$$\frac{d}{dt}\Big[f_x\big(x(t),y(t)\big)\Big]=hf_{xx}+kf_{xy},\quad \frac{d}{dt}\Big[f_y\big(x(t),y(t)\big)\Big]=hf_{yx}+kf_{yy}$$

$f_{xy}=f_{yx}$を用いると

$$F''(t)=h\big(hf_{xx}+kf_{xy}\big)+k\big(hf_{yx}+kf_{yy}\big)=h^2\,f_{xx}+2kh\,f_{xy}+k^2f_{yy}$$

となる．

(7) $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)$による表記：

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\big(hf_x+kf_y\big)=h^2\,f_{xx}+2kh\,f_{xy}+k^2f_{yy}$$

(8) 2 次のテーラー展開：

$$F(1) = F(0) + 1 \times F'(0) + \frac{1}{2!} \times 1^2 \times F''(0) + \frac{1}{3!} \times 1^3 \times F'''(\theta)$$

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\Big|_{(a,b)} + \frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\Big|_{(a+\theta h, b+k\theta)}$$

1 変数関数のテーラー展開を，同じように微分演算子を用いて表すと

$$g(a+h) = g(a) + h\frac{dg}{dx}\Big|_a + \frac{1}{2!}h^2\frac{d^2g}{dx^2}\Big|_a + \frac{1}{3!}h^3\frac{d^3g}{dx^3}\Big|_{a+\theta h}$$

$$= g(a) + h\frac{d}{dx}g\Big|_a + \frac{1}{2!}\left(h\frac{d}{dx}\right)^2 g\Big|_a + \frac{1}{3!}\left(h\frac{d}{dx}\right)^3 g\Big|_{a+\theta h}$$

(9) 関数$f(x,y)$の点(a,b)のまわりの性質を観察するには，hとkの値を様々に変える必要がある．たとえば
$h = 1$，$k = m$とおいてmを変えてもよい(mが発散するy軸方向には適用できない)
$\sqrt{h^2 + k^2} = 1$と仮定して$h = \cos\phi, k = \sin\phi$とおいて$\phi$を変えてもよい.

どちらの向きに移動しても関数値 f が減少（増大）するなら，この点で関数は極小（大）となる.
移動の方向により関数値が減少したり増大したりするなら，この点で関数は極値をとらない.

など.