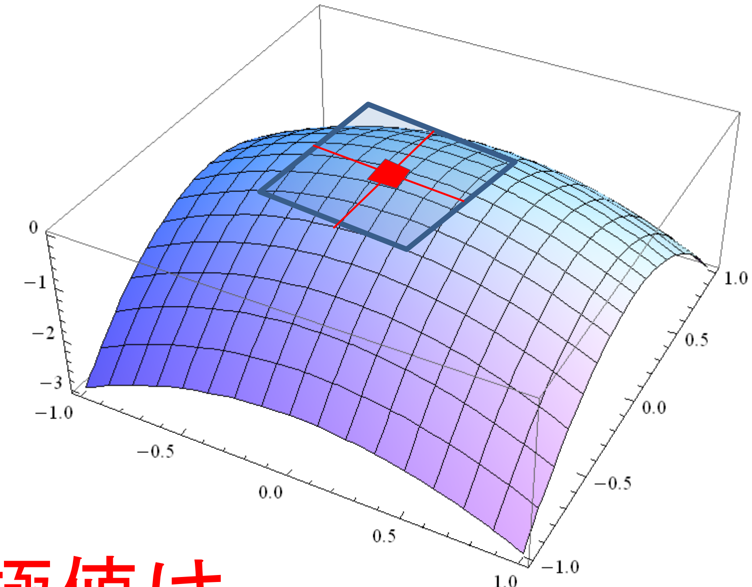
極値の探索

極値の条件(1)

- 接平面が水平

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$



問1

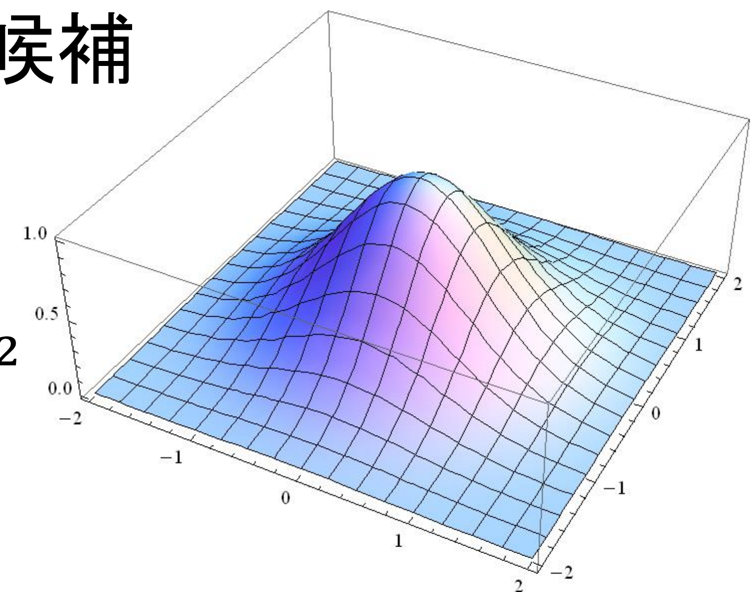
$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$の極値はどこにあるか？

問1　$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$の極値

$$f_x=-2x\,e^{-x^2-y^2}=0\rightarrow x=0$$
$$f_y=-2y\,e^{-x^2-y^2}=0\rightarrow y=0$$

$(x,y)=(0,0)$が唯一の候補

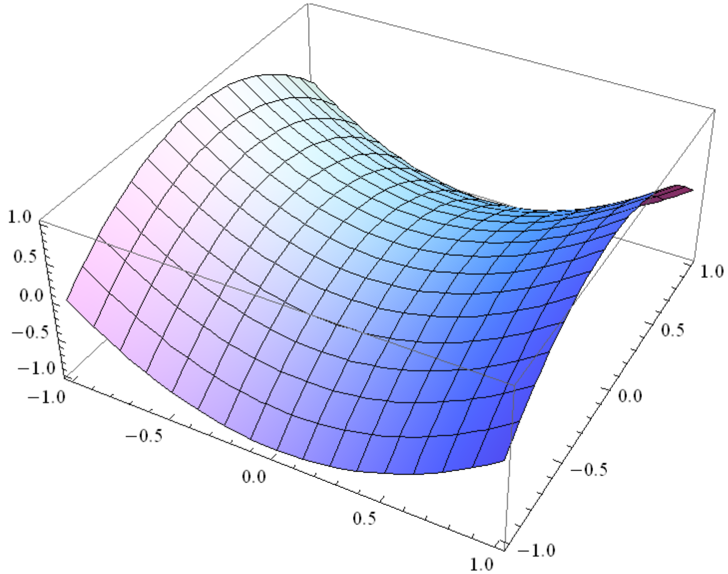
$$\begin{aligned}f(x,y)&=e^{-(x^2+y^2)}\\&=e^{-x^2}e^{-y^2}\\&=e^{-r^2}\end{aligned}$$

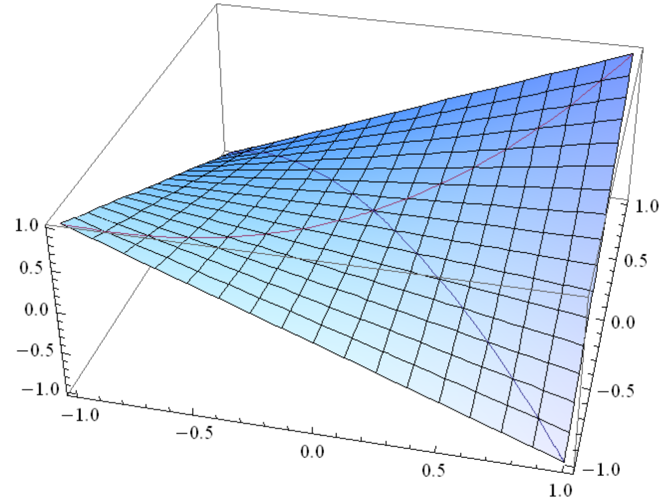


鞍点

問2　以下の関数の原点における偏微分係数の値をもとめよ.

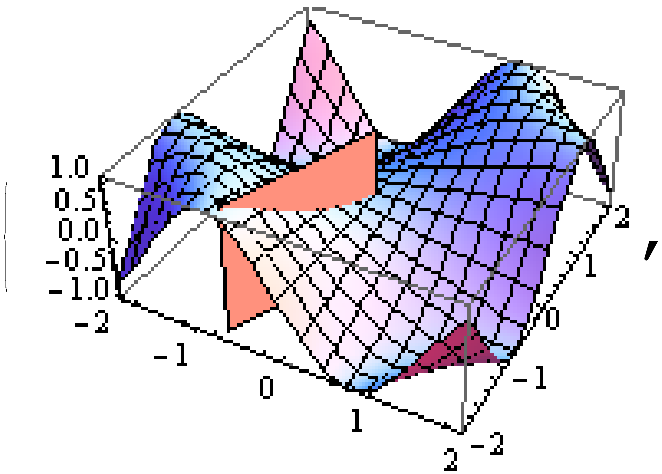
$$f(x,y)=x^2-y^2$$
$$f(x,y)=xy$$

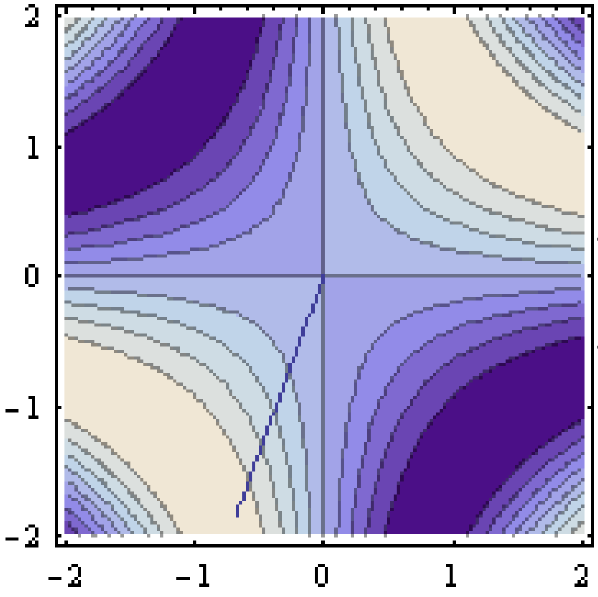




極値の条件(2)

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点から，どちらの向きに行っても登り（極小），あるいは降り（極大）





四方に目配りする

- 原点が極値の候補とする

- 原点から出発するxy面内の半直線 $y = mx$
にそって原点から遠ざかる:
$$x(t) = t, \qquad y(t) = mt, \qquad t \geq 0$$

- 関数値の変化をtの関数として表す:
$$f(x(t), y(t); m) = f(t; m)$$

- $f(t; m)$という記号: tの関数だが,mによっても値が変わる
ことを思い出させるため．一般的な記号ではない

- **原点から*m*の方向に遠ざかるときの登り(降り)を調べ,**
mの値をどんなに変えても登り(降り)なら極小(大)

$$f\bigl(x(t),y(t)\bigr)=f(t)$$

- $x(t)=t, y(t)=mt \to \frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=m$
- $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}$
- (0,0)で$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0 \to \frac{df}{dt}=0$

- $f(t)=f(0)+\frac{df}{dt}t+\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dt^2}t^2+\cdots$

$$=f(0)+\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dt^2}t^2+\cdots$$

mによって$\frac{d^2f}{dt^2}$の符号が変わるとき鞍点になる

問3　$\frac{d^2f}{dt^2}=f_{xx}+2mf_{xy}+m^2f_{yy}$となることを示せ

問3 $\dfrac{d^2 f}{dt^2} = f_{xx} + 2mf_{xy} + m^2 f_{yy}$

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = f_x + mf_y$$

f_x, f_yが$x(t), y(t)$の関数 $\rightarrow \dfrac{df}{dt}$も$x(t), y(t)$の関数

$$\frac{df_x}{dt} = f_{xx} + mf_{xy}, \qquad \frac{df_y}{dt} = f_{yx} + mf_{yy}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(f_x + mf_y\right) = \left(f_{xx} + mf_{xy}\right) + m\left(f_{yx} + mf_{yy}\right)$$

$$= f_{xx} + 2mf_{xy} + m^2 f_{yy}$$

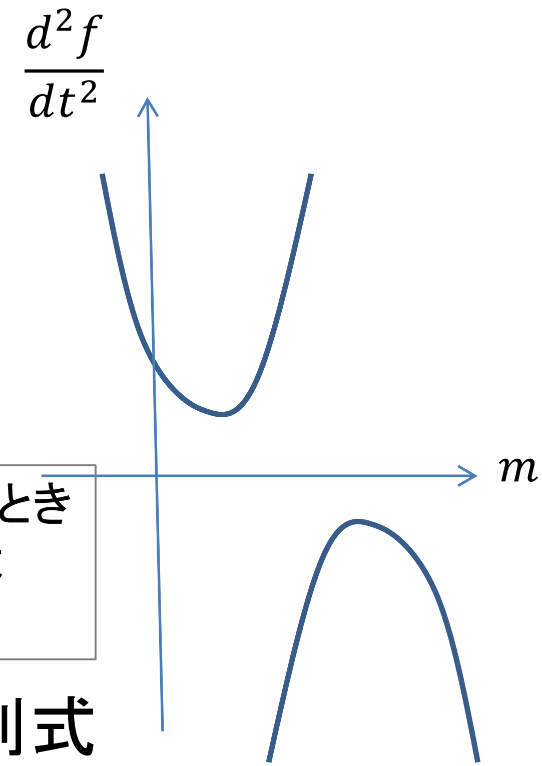
mによらず$\frac{d^2f}{dt^2}$の符号が変わらない

$$\frac{d^2f}{dt^2} = f_{xx} + 2mf_{xy} + m^2f_{yy}$$

mについての２次式の
判別式が負

$$\Delta \equiv f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} < 0$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix},\ \ ||H|| > 0$$ ヘスの行列式



判別式が0のとき
この方法では
分からない

問4 $f(x,y) = x^2 + y^2, f(x,y) = x^2 - y^2, f(x,y) = xy$
について，原点におけるΔを計算し，極値か鞍点かを識別せよ

問4　判別式による極値・鞍点の識別

$f = x^2 + y^2$

$f_x = 2x, f_y = 2y, f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 0$

$\Delta = 0^2 - 2 \times 2 < 0$, 原点においても$\Delta < 0$（極値）

$f = x^2 - y^2$

$f_x = 2x, f_y = -2y, f_{xx} = 2, f_{yy} = -2, f_{xy} = f_{yx} = 0$

$\Delta = 0^2 - 2 \times (-2) > 0$, 原点においても$\Delta > 0$（鞍点）

$f = xy$

$f_x = y, f_y = x, f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = f_{yx} = 1$

$\Delta = 1^2 - 0 \times 0 > 0$, 原点においても$\Delta > 0$（鞍点）

判別式が0のとき

問5　$f = x^4 \pm y^4$が原点において極値か鞍点かを調べよ

$$f_x = 4x^3, f_y = 4y^3, f_{xx} = 12x^2, f_{yy} = 12y^2, f_{xy} = f_{yx} = 0$$

$$\Delta = 0^2 \mp 12^2 x^2 y^2 \to 0 @ (0,0)$$

$$x = t, y = mt \to f(t; m) = (1 \pm m^4) t^4$$

- mの値によらず$(1 + m^4) > 0$だから，極値
- $(1 - m^4)$はmの値により符号を変えるので，鞍点

極大と極小の判別

- $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$となる(a,b)が極値の候補

- $\Delta(a,b)=\{f_{xy}(a,b)\}^2-\{f_{xx}(a,b)\}\{f_{yy}(a,b)\}<0$なら極値

- 極値ならば，どの方向で調べても極大（小）を判定できる

$$f_{xx}>0 \quad \left(f_{yy}>0\right) \to \text{極小}$$
$$f_{xx}<0 \quad (f_{yy}<0) \to \text{極大}$$

問6 $e^{-(x^2+y^2)}$は原点で極大か極小か

問6　$f = e^{-(x^2+y^2)}$

の原点における性質を調べよ

$$f_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}, \qquad f_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

$$f_{xx} = (4x^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)}, f_{yy} = (4y^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{-(x^2+y^2)}$$

$$\Delta = \{(4xy)^2 - (4x^2 - 2)(4y^2 - 2)\}\, e^{-2(x^2+y^2)}$$

$$\Delta(0,0) = -4 < 0, \qquad f_{xx}(0,0) = -2 \times e^0 = -2 < 0$$

原点は極大

最大と最小

- 全域を微分できる領域に分割する
- 小領域内の極大(小)が最大(小)の候補
- 小領域の境界上の点も最大(小)の候補
- 全体を見渡して，最大(小)を決める.

問7 $D = \{(x, y) | x \geq -1, y \geq -1\}$において
$f = e^{-(x^2+y^2)}$
の最小値と最大値を求めよ.

問7

領域Dの内部：

$D \ni (0,0)$,　$f(0,0) = e^0 = 1$　最大値の候補

$\lim_{x,y\to\infty} f(x,y) = 0$: 関数値は常に正で0にならない

領域Dの境界線上:

直線 $x = -1$　の　$y \geq -1$の部分　$f(-1,y) = e^{-1-y^2} = \frac{1}{e} \times e^{-y^2}$

- $f(-1,0) = \frac{1}{e}$は直線上の極大
- $f(-1,-1) = e^{-2}$：直線の端であり，極小
- $\lim_{y\to\infty} f(-1,y) = 0$: 関数値は0にならない

直線 $y = -1$　の　$x \geq -1$の部分

- まったく同様

原点で最大値1をとり，最小値は存在しない（が限りなく0に近づく）