1. 次の 2 変数関数のグラフを描け
   - $z = x^2$
   - $z = x^2 + y^2$
   - $z = x^2 - y^2$
   - $z = xy$

   ヒント：対称性，極座標で書く，一方の変数を固定，他方を動かしたときの曲線，等高線

2. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ を極座標で表し，原点付近の関数の様子を調べよ．

3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$のグラフを描け

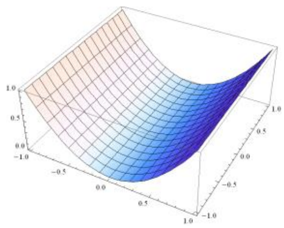
4. z軸と平行で xy 軸と$(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$で交わる平面の式は？
5. 各座標軸と$(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$, $(0,0,\gamma)$で交わる平面の式？
6. 平面$z = Ax + By + C$について
   - x 軸(y 軸)方向の傾きは？
   - xy 平面に等高線を描くとき，原点を通る等高線の式は(xy 平面の直線の式)？
   - この平面の最大傾斜の方向（xy 平面内の方向）とその傾きは？
7. 次の関数の偏微分係数の原点における値を求めよ：$z = f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + e^{-(x^2+y^2+2xy)}$
8. 次の関数 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ のグラフは半径 2 の半球を伏せた形である．$(x_0, y_0) = (1,0)$および$(1,1)$における接平面の式を求めよ
9. $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0(\cdots$原点を除く) となることを示せ
10. $f(x,y) = x^2 y^3$の 2 階偏微分係数f_{xy}とf_{yx}を計算せよ

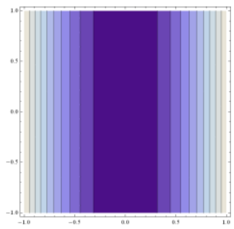
解答

1. $z = x^2$

   yを含まない→y軸と平行に移動すると同じ形

   zx平面内で放物線



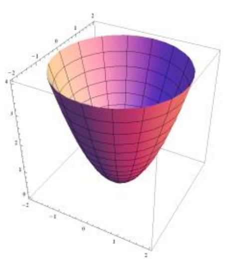


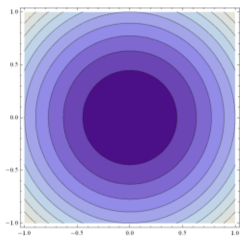
$z = x^2 + y^2$

等高線は原点を中心とする円

zx平面内$(y = 0)$で放物線

この放物線を z 軸を中心に回転する

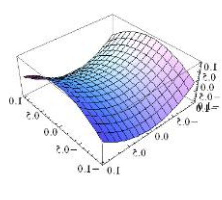


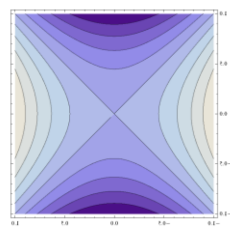


$z = x^2 - y^2$

等高線は双曲線

一方の変数を固定すると，放物線





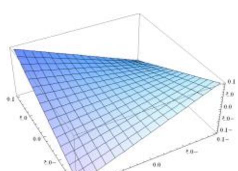
$z = xy$

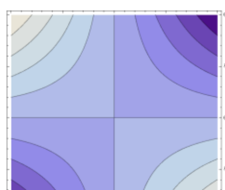
等高線は双曲線

一方を固定すると直線

座標変換

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$$





$$xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$$

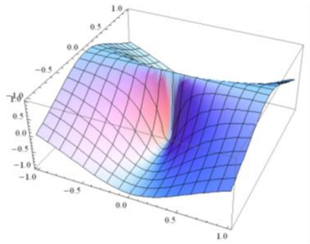
2. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2\cos 2\theta}{r^2} = \cos 2\theta \cdots r \neq 0$$

原点で関数は値を持たない

0/0 だけなら定義しなおせばよい

原点に近づく方向θにより，付近の関数値が異なるので定義のしようがない.

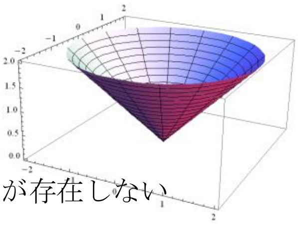


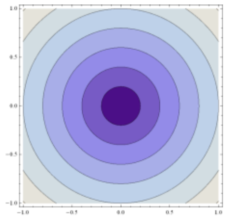
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r(\geq 0)$

zx平面内で$z = |x|$，z軸について回転対称

等高線が原点を中心とする円

原点で関数値は 0，接線が存在しない，接平面が存在しない





4. Z は任意の値. $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$

5. $ax + by + cz = d$の形になる. $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$；$(\alpha, 0,0)$ を満たす，etc

6. A と B が x 軸と y 軸方向の傾き. 原点を通る等高線は Ax+By=0

最大傾斜はベクトル(A,B)の方向，大きさは$\sqrt{A^2 + B^2}$

7. $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + e^{-(x^2+y^2+2xy)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - (2x + 2y)e^{-(x^2+y^2+2xy)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x - (2x + 2y)e^{-(x^2+y^2+2xy)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = f_x(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = f_y(0,0) = 0$$

8. $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},\ f_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \to \quad f(1,0) = \sqrt{3},\ f_x(1,0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, f_y(1,0) = 0$$

$$\text{接平面：}\quad z = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x - 1) + \sqrt{3}$$

$$f(1,1) = \sqrt{2},\ f_x(1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, f_y(1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{接平面：} z = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1) + \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + 2\sqrt{2}$$

9. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, etc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

10. $f(x,y) = x^2 y^3$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = 6xy^2, \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2) = 6xy^2$$