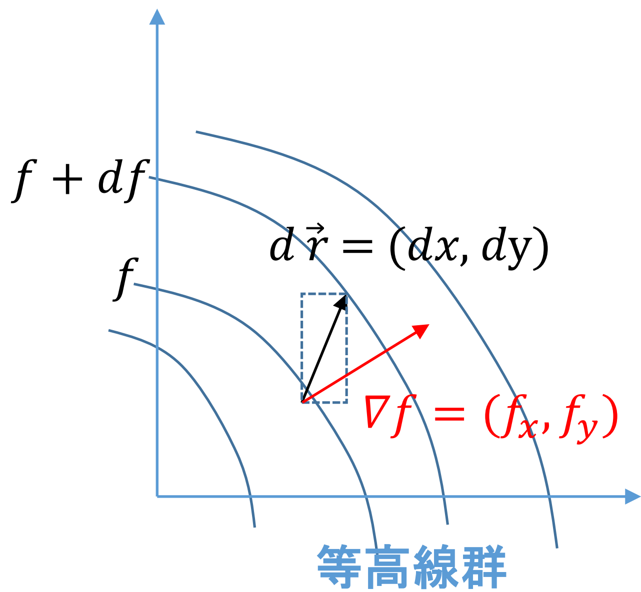
全微分とその利用

全微分 df

$d\vec{r} = (dx, dy)$　　：点(x, y)から微小な変位

接平面上の移動と考えてよい

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \nabla f \cdot d\vec{r}$$



微小な変位$d\vec{r}$による関数値の微小変化

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right):$$

ナブラf，grad f，f の勾配（ベクトル），グラディエント

問1　$d\vec{r}$ を接平面上で等高線の向きにとると全微分dfは？

$d\vec{r}$ をx軸方向にとるとdfは？

$d\vec{r}$ を直線$y = mx$上にとり，大きさをdrとするとdfは？

$d\vec{r}$ を接平面の最大傾斜の向きにとり，大きさをdrとするとdfは？

問1　各微小変位による全微分を求めよ

- 等高線に沿った微小変位　$d\vec{r}$

  等高線⇒高さが同じ⇒fの値が同じ⇒$df = 0$

$$df = f_x dx + f_y dy = 0,\ \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$$

- x軸方向：　$d\vec{r} = (dx, 0)$

$$f = f_x dx + f_y \times 0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

- 直線$y = mx$上：　$d\vec{r} = \left(\frac{dr}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m\,dr}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

$$df = \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{mf_y}{\sqrt{1+m^2}}\right) dr$$

- 最大傾斜の方向：　$d\vec{r} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} dr,$

$$df = \nabla f \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} dr = \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} dr = |\nabla f| dr = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 dr}$$

合成関数（1）

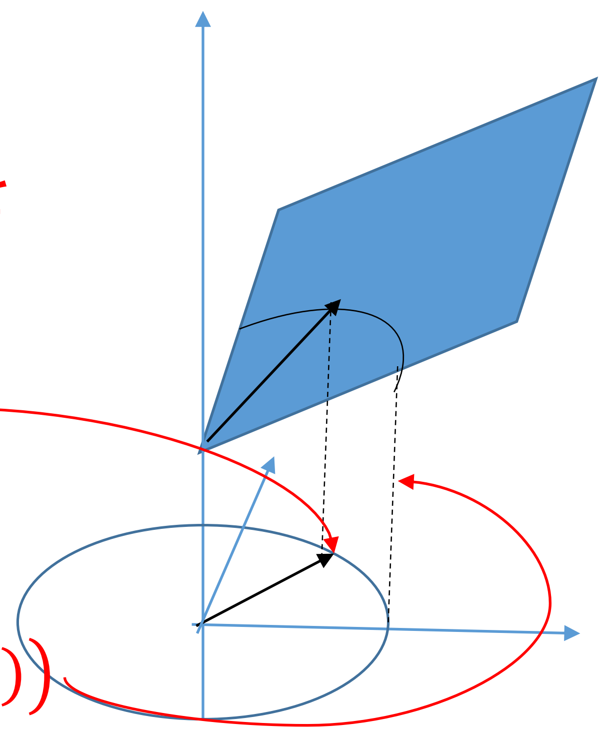
$$f(x,y) = f(x(t), y(t))$$

- $x(t), y(t)$：　パラメータ表示による曲線の式
  時刻tにおける点の座標とする
- $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$　　：　点の速度ベクトルの成分

問2　原点を中心とする半径Rの円周上を
周期Tで回転する点(x,y)がある：

$$x(t) = R\cos\frac{2\pi}{T}t,\ y(t) = R\sin\frac{2\pi}{T}t$$

平面$z = f(x,y) = Ax + By + C$の上の
運動としてみると，高さ$z(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$
はどのように変動するか



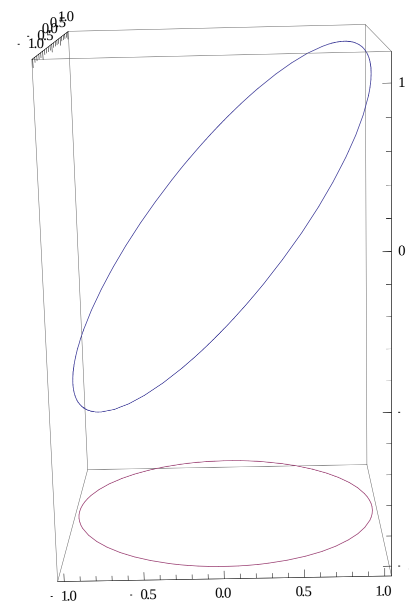
問2

$$z(t) = A\left(R\cos\frac{2\pi}{T}t\right) + B\left(R\sin\frac{2\pi}{T}t\right) + C$$

$$= R\sqrt{A^2+B^2}\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right\} + C$$

$$= \ R\sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \phi\right) + C,$$

ただし $\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$



振幅= $R\sqrt{A^2+B^2}$, 周期Tの単振動

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2\pi}{T}R\sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \phi\right), \phi = \arctan\frac{B}{A}$$

地図上の移動速度(v_x, v_y)と

上昇・下降速度$\frac{dz}{dt}$

$$z(t) = f\big(x(t), y(t)\big) \Rightarrow \frac{dz}{dt}$$

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{dz}{dt} dt$$

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = f_x v_x + f_y v_y = \nabla f \cdot \vec{v}$$

問3.　直接の計算で得た問2の上昇・下降の速度

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dt} = -\frac{2\pi}{T} R\sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \phi\right)}$$

と同じ値になるか，比較せよ.

問3

$$z = f(x, y) = Ax + By + C, \qquad f_x = A, \ \ f_y = B$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi}{T} R \sin \frac{2\pi}{T} t\,,$$

$$v_y = \frac{2\pi}{T} R \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$\frac{dz}{dt} = (A, B) \cdot \left(v_x, v_y\right)$$

$$= -\frac{2\pi}{T} R\ A\sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{T} R\ B\cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$= \ -\frac{2\pi}{T} R \left\{ A\sin \frac{2\pi}{T} t - B\cos \frac{2\pi}{T} t \right\}$$

$$= -\frac{2\pi}{T} R \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \phi\right), \phi = arctan \frac{B}{A}$$

合成関数（2）

$$f(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$$

例としては座標変換　　$(x,y)\leftrightarrows(u,v)$：

注意：

$f(u,v)$: $f(x,y)$のxにuを，yにvを代入したものではない

$f\big(x(u,v),y(u,v)\big)=g(u,v)$と書くべきかもしれない．習慣

問4　$\boldsymbol{x=Au+Bv,\ y=Cu+Dv}$ のとき，

u,vを新たな座標とする偏微分係数$\boldsymbol{f_u,f_v}$を求めよ.

ヒント：全微分を用いる.

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=Adu+Bdv$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv=Cdu+Ddv$$

問4

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = Adu + Bdv$$

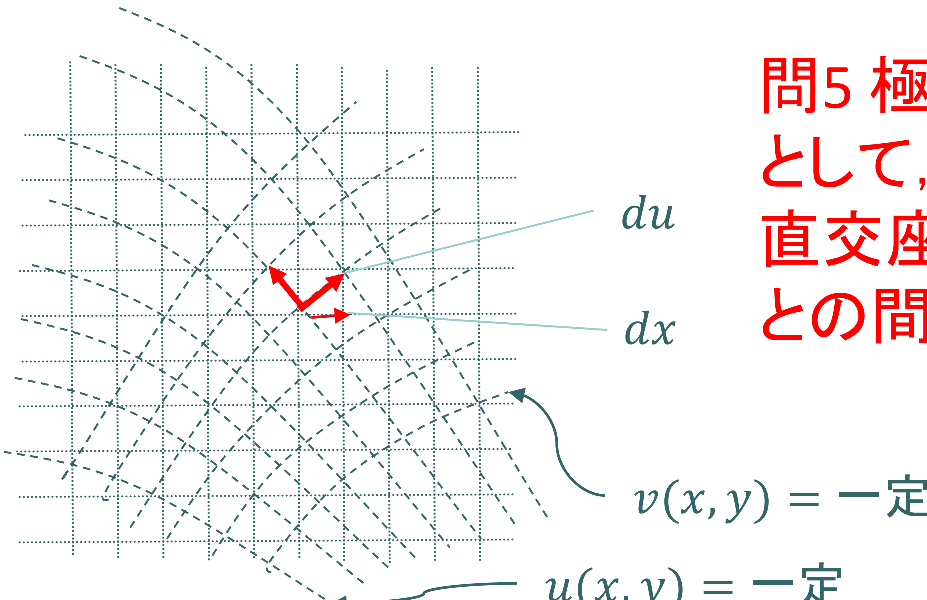
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = Cdu + Ddv$$

$$\begin{aligned} df &= f_x dx + f_y dy \\ &= f_x(Adu + Bdv) + f_y(Cdu + Ddv) \\ &= (Af_x + Cf_y)du + \left(Bf_x + Df_y\right)dv \\ &= f_u du + f_v dv \end{aligned}$$

$$f_u = (Af_x + Cf_y), \qquad f_v = \left(Bf_x + Df_y\right)$$

曲線座標系

- $u(x, y) = c,\ v(x, y) = d$を満たす２曲線
  - cとdをそれぞれ等間隔に変える
  - 網目状の曲線群を得る
  - これらを「座標」に用いることができる

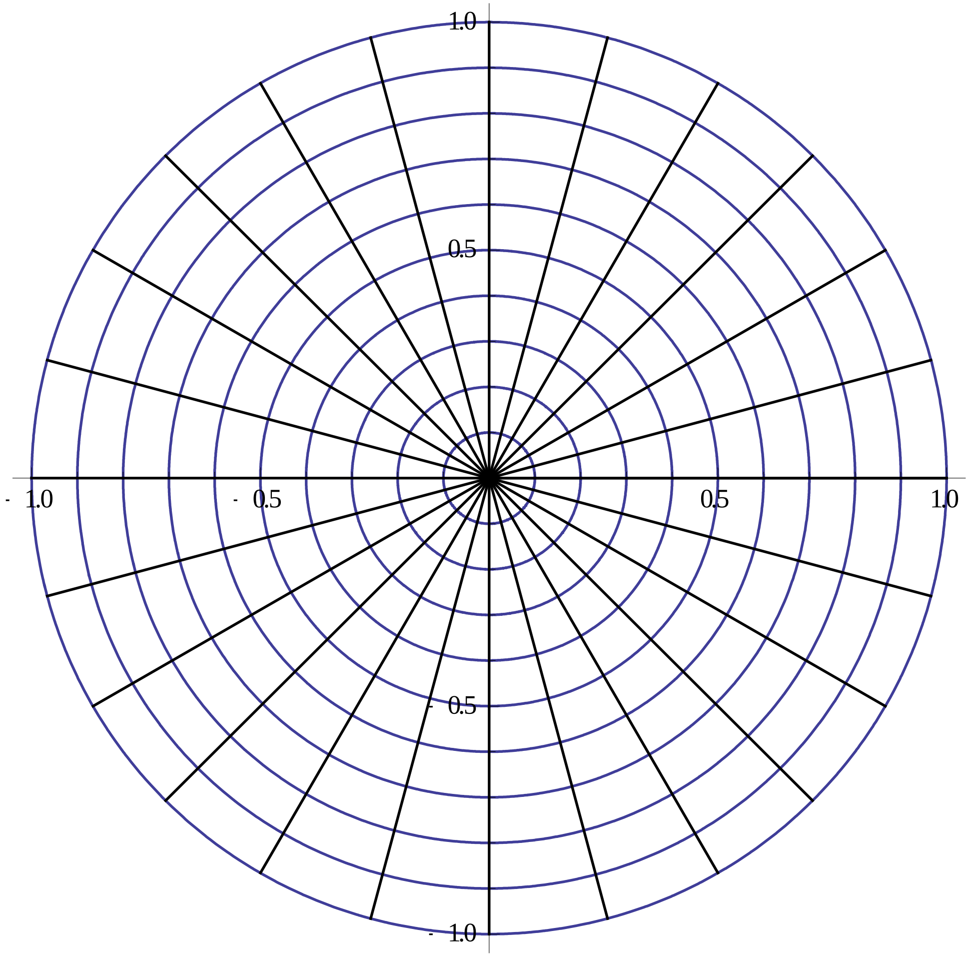


問5 極座標(r, θ)を曲線座標系として，座標の曲線群を描け．直交座標系（原点とx軸共通）との間の座標変換の式を書け．

問5
極座標系と直交座標系の座標変換を記せ

$$x(r, \theta) = r\cos\theta$$
$$y(r, \theta) = r\sin\theta$$

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$$



座標変換後の偏微分係数

$x(u,v), y(u,v)$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

$$df = f_x dx + f_y dy = f_x(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv) + f_y(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv)$$

$$f_u = f_x \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad f_v = f_x \frac{\partial x}{\partial v} + f_y \frac{\partial y}{\partial v}$$

問６　極座標における偏微分係数を計算せよ

問6

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\,,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$f_r = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta$$
$$f_\theta = -f_x r\sin\theta + f_y\, r\cos\theta$$

問7

$f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2 = f(r, \theta)$について,

直接に, および上の方法で

極座標における微分係数f_r, f_θを計算せよ

問7

$$f(r,\theta) = r^2$$

$$\to f_r = 2r, \qquad f_\theta = 0$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\to f_x = 2x = 2r\cos\theta, \;\; f_y = 2y = 2r\sin\theta$$

$$\begin{aligned} f_r &= f_x \frac{\partial x}{\partial r} + f_y \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2r\cos\theta)\cos\theta + (2r\sin\theta)\sin\theta \\ &= 2r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\theta &= f_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + f_y \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= (2r\cos\theta)(-r\sin\theta) + (2r\sin\theta)(r\cos\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

合成関数 (3)

原点からの距離だけの関数 $:f(r) = f\big(r(x,y)\big) = f(x,y),\ \ r = \sqrt{x^2+y^2},$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

例: $f(x,y) = x^2+y^2 = r^2 = f(r)$

一般に, $f(s) = f(s(x,y))$

$$\boxed{f_x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(r(x+\Delta x,y)\big)-f(r(x,y))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(r+\Delta r)-f(r)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta r\to 0}}\frac{f(r+\Delta r)-f(r)}{\Delta r}\times\frac{\Delta r}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta r\to 0}\frac{f(r+\Delta r)-f(r)}{\Delta r}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{r(x+\Delta x,y)-r(x,y)}{\Delta x} = \frac{df}{dr}\times\frac{\partial r}{\partial x}\boxed{=\frac{df}{dr}\times\frac{x}{r}}$$

$$\boxed{f_y = \frac{df}{dr}\times\frac{y}{r}} \qquad \nabla f = (f_x, f_y) = \frac{df}{dr}\times\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right) = \frac{df}{dr}\times\frac{1}{r}(x,y) = \frac{df}{dr}\times\frac{\vec{r}}{r}$$

問8 $f(r) = r^2 = x^2+y^2$の, $(x,y) = (1,2)$における最大傾斜を表すベクトルを求めよ

問8

$$f(r) = r^2, \qquad \frac{df}{dr} = 2r, \qquad \nabla f = 2r \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = 2\vec{r}$$

$$\vec{r} = (1,2) \rightarrow \nabla f \Big|_{(1,2)} = (2,4)$$

原点からの距離だけの関数$f(r)$の等高線は原点を中心とする同心円となる．最大傾斜の方向は，注目する点を通る同心円の接線と直交する向き，すなわちその点を通る半径の方向である．

$f(r)$の最大傾斜の大きさは，原点からの距離rだけの関数となるので，たとえばx軸上の点$(r, 0)$における傾き$f_x(r, 0)$が最大傾斜の傾きと一致する（xz断面のグラフの傾き）．

陰関数微分

$f(x,y)=0$ の全微分: $df=f_x\,dx+f_y\,dy=0$

$\Rightarrow$

$$dy\,f_y=-dx\,f_x\ \rightarrow\ \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$$

問9

円: $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ から $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

問9

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

$$df = 2xdx + 2ydy = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$