問題 1-2 {3}

注意：数学的帰納法を「帰納法」と省略することはできません．「帰納法」ではないのですから!

Q. なぜ数学的帰納法がアルゴリズムに関係があるのですか.

A. 関係あると言いましたか？

Q. 巻末解答では両辺に(1+h)をかけて証明していたが二項定理でやってはいけないのでしょうか.

A. 二項定理を用いれば数学的帰納法は不要ですね．単に証明するのが目的の時は，正しければどのような方法で証明してもかまいません．ただ，この問では数学的帰納法を勉強する目的もあって，証明の方法を限定しています.

Q. 数学的帰納法は，どのような命題を証明する方法として使えるのでしょうか。

A. まず，命題が「すべての自然数 n について・・・」という形であれば，数学的帰納法を使ってみようかな，という気持ちが動きます（数学的帰納法を使わず，しかももっと簡単な証明法があるかもしれません）.

「すべての n について」というと，自然数は無限個あるので，具体的な数を順番にひとつずつ確かめることができないため，数学的帰納法が有用になるのです.

- ○ 命題 P(n) について，「P(1)が成り立つ」こと，かつ「 P(k)が成り立つ　⇒　P(k+1)が成り立つ」ことを証明するだけで，「(1), P(2), P(3),…P(n),… とすべての自然数について命題が成り立つことを証明したのと同等です.
- ○ 「ある自然数 j（2 とか 3 とか・・・）について P(j)が成り立つ」こと，かつ「 P(k)が成り立つ　⇒　P(k+1)が成り立つ」ことを証明するだけで，P(j),P(j+1), P(j+2), P(j+3),…P(n),… と，j 以降のすべての自然数について命題が成り立つことを証明したのと同等です.
- ○ 「ゼロあるいは負の整数 m について P(m)が成り立つ」こと，かつ「 P(k)が成り立つ　⇒　P(k+1)が成り立つ」ことを証明するだけで，P(m),P(m+1), P(m+2), P(m+3),…P(n),… と，m 以降のすべての整数について命題が成り立つことを証明したのと同等です.
- ○ 「ある整数 m について P(m)が成り立つ」こと，かつ「P(k)が成り立つ　⇒　P(k－1)が成り立つ」ことを証明するだけで，P(m), P(m－1),P(m－2),….と，m より前のすべての整数について命題が成り立つことを証明したのと同等です.
- ○ 命題 P(n) について，「P(1)が成り立つ」こと，かつ「 P(k)が成り立つ　⇒　P(k+2)が成り立つ」ことを証明するだけで，「P(1), P(3), P(5),…P(2n－1),… とすべての奇数の自然数について命題が成り立つことを証明したのと同等です.
- ○ 命題 P(n) について，「P(1), P(2)が成り立つ」こと，かつ「 P(k), P(k+1)が成り立つ　⇒　P(k+2)が成り立つ」ことを証明するだけで，「P(1), P(2), P(3),…P(n),… とすべての自然数について命題が成り立つことを証明したのと同等です.
- ○ 命題 P(n) について，「P(1), P(2), P(3)が成り立つ」こと，かつ「 P(k), P(k+1),P(k+2)が成り立つ　⇒　P(k+3)が成り立つ」ことを証明するだけで，「P(1), P(2), P(3),P(4)…P(n),… とすべての自然数について命題が成り立つことを証明したのと同等です.

- ○ 使わなくてよいのに使う必要はありません．たとえば

$$\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

を証明するのに，数学的帰納法を使うのは勧められません．

Q. 巻末解答の

3. $n=2$ のとき，$(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h$ が成り立つ．$n=k$ のとき証明すべき式が正しいと仮定する，$(1+h)^k>1+kh$．この両辺に $1+h>0$ をかけても不等号の向きは変わらず，

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h$$

よって，$k+1$ に対しても証明すべき式は成り立つので，数学的帰納法により，証明すべ

のところで，「n=k のときの式$(1+h)^k > 1 + \mathrm{kh}$を使って n=k+1 のときの式を証明」しているらしいのですが，式の変形をたどっても証明になっているかわかりませんでした．またkh^2の消し方が分かりませんでした．

A. 教科書の論旨をたどってみましょう：

$$(1+h)^k > 1 + kh$$

が成り立つと仮定します．この両辺に$(1+h)$をかけると，$(1+h) > 0$なので，不等式の大小関係は変わらず

$$(1+h)^k(1+h) > (1+kh)(1+h) \cdots (*)$$

となります．この不等式(*)の右辺を展開すると

$$(1+kh)(1+h) = 1 + kh + h + kh^2 = 1 + (k+1)h + kh^2 \cdots (**)$$

ですが，再右辺のkh^2は（kが自然なので正，および$h^2 > 0$だから，その積も）正です．そうすると，再右辺からkh^2を引き去るともとの値より小さくなります：

$$1 + (k+1)h + kh^2 > 1 + (k+1)h$$

以上を総合すると教科書の式：

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h) = 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h$$

となります．

問題 1-3 {3}

Q. r^nで r=1 のとき$\lim_{n\to\infty} r^n$この式で$\lim_{n\to\infty} r^n$は 1 になりますがこれは「収束した」と言えるのでしょうか？

A. 学術用語が日常的な感覚と「どこかでかけ離れてしまう」ことがあります.「収束」もその例かもしれません．数列が「ある値に収束する」とは：

その値の上下に「自分で適当に想定した幅$(\pm\epsilon \neq 0)$」のゾーンを設定すると，
どんなに幅ϵが小さくても，あるところ(N番目)から先のすべての項の値が
幅の中に入ってしまうこと

です．いったん，このように定義すれば，定義にしたがう数列はすべて収束するし，したがわない数列は収束しないということになります．

たとえば，1,1,1,…. と 1 が無限に続く数列は，1 を中心とする幅 ε のゾーンをとると， ε がどんなに小さな（0 でない）数でも，すべての項が幅のなかに入るので「1 に収束」となります．

一方，$1,-1,1,-1$ ....のように 1 と－1 が交互に現れる数列は，1 を中心とする幅をとっても,－1 を中心とする幅をとっても，幅の大きさが 1 より小さくなったとたんに，幅の中に納まりきらない項が無限に出てくるので「発散」となります．発散とは「収束しない」と定義するので，こういう言い方になります．少し妥協して「振動する」ということもありますが.

Q.「$r>1$のとき$r=1+h$, $r<1$のとき$r=\frac{1}{1+h}$（ただし$h>0$）とおく」とあり、問題 1-2 の 3 の不等式を利用しなければならないようですが、なぜですか。

A. 「しなければならない」というわけでもないです．教科書の著者が，それがよいと思ったからでしょう．

Q. 0≦n≦2 の範囲を求めなくて良いのだろうか。

A. 数列$\{r^n\}$の$n\to\infty$の極限値とは，「nがどんどん大きくなるときr^nが限りなく接近していく標的」のことです．言い換えると，最初の 2 項や 3 項は（100 万項であろうと，ある決まった n 番目の項に注目するかぎり）その値がどんな数になろうと（有限の値であるかぎり），極限値の計算には無関係で，どうでもよいことなのです．

Q. $r>1, r=1, 0<r<1$に場合分けすれば，r^n なので結論のようになるのは証明されると思うのですが、解答のように「r=1+h」などとする必要はないと思います。

A. $r=1$のときは，確かに，何回かけても 1 だから，$\{r^n\}=\{1,1,1,\cdots\}$となり極限値が 1 であることは自明なのです．しかし，たとえば$r>1$の n 乗が発散することを（仮にそれが自明だとしても）論理的に証明しようとしたら，どうします？ここでは，数列{n}が発散すること（自然数の性質として，どんどん大きくなることが自明）を用いて$\{r^n\}, r>1$が発散することを証明しようとしています．

Q. a^xという関数を考えたとき，$a<0$ならグラフはどのようになるのだろう？

A. おかしなことが起きないように$a>0$に限定します．

演習[2]

Q. 数列の一般項が関数の比の形，たとえば$\frac{1}{n}e^n$や$\frac{1}{n}\log n$のようにあたえられ，分母と分子がともに無限大に発散するとき，収束するかどうかを判定するのはどうすればよいのでしょうか.

A. これは重要な課題です．プログラムの計算量を考察するときこの考え方が出てきます．関数の性質を習うと同じ問題が出てきますので，それまで解答を保留します．先に勉強したい場合は教科書の 2 章（関数の極限の項とその練習問題群）を読んでください．

演習[2](5)

Q. 分子・分母をn^2で割るという操作は$\frac{n^2(1-\frac{1}{n})}{n^2(2+\frac{9}{n}+\frac{2}{n^2})}$というように分子・分母でそれぞれ$n^2$でくくりだしてから割っているという解釈でいいのですか？

A. 正しいです．

演習[2](8)

Q. $a_n=3(-1)^n+2$は「発散（振動）する」というが、-1、5という決まった値を取るのにどうして発散なのでしょうか.

A. 収束するとは,「一般項が唯一の値に限りなく近づくこと」なので，２つの値を交互にとるときは「収束しない」ことになります．収束しない数列は（その状況によらず）発散するということになっています．

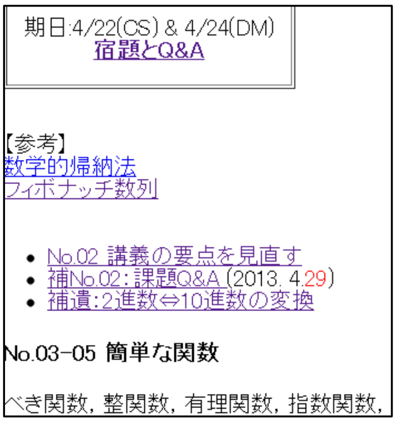
演習[2](9)

Q. WebPage の Q&A や巻末には 2,4,8・・・により発散とありますが、n=0 は考えなくてよいのでしょうか？また， n →－∞の極限は考えなくてよいのですか？

A. $n\to\infty$の極限に注目するときは，数列の「あるところから先，しかも，どんどん先に行くときの様子」を考察します．最初のほうの項は，それが 100 番目まででであろうと 100 万番目であろうと，どうでもよいのです．そこから先にどうなるかが気になります．ここでは「正の数が 2 倍，2 倍で大きくなる」という変化の様子に注目しています．
数列の項は n=0 あるいは n=1 から開始し，n を増やしていくのが暗黙の了解です．とくに断らない限り，n を負で大きくしていくことはありません．

演習[3]

多くの質問がフィボナッチ数列の一般項を漸化式から求める手順あるいは計算の詳細についてでした．ウェブページの【参考】フィボナッチ数列の項にある程度の説明があるので，参照してください．なお疑問点があれば，もう一度質問をしてください．



その他

Q.「収束の厳密な定義」の部分を読んでみて、また p13 の coffee break を読んでみて、定義 1.10 のなんとなくのイメージはついたのですが、具体的にどのような使い方をするものなのでしょうか？

A. たとえば問題 1-4{2}にその例があります．